



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

2004

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

1. Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n \geq 1}$ la suite réelle définie, pour tout entier n strictement positif, par

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx.$$

1. a) Montrer que $(c_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs.

1. b) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a

$$c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}.$$

1. c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité

$$\frac{1}{n} \leq 2c_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

1. d) Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right).$$

1. e) Écrire un programme en Python qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n .

On peut utiliser `from math import log` : `log(x)` renvoie le logarithme népérien d'un réel strictement positif. `input(message)` affiche le message et lit une chaîne de caractères ; `int(chaine)` convertit une chaîne représentant un entier en cet entier ; `print(valeur)` affiche une valeur.

2. Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ \frac{1}{c_n t^n (1+t)} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

2. a) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, établir, pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)} dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du.$$

2. b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n .

2. c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1} .

2. d) Dans cette question exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1 .

En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $P(X_1 \leq y) \geq \frac{1}{2}$. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

2. e) Soit x un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'encadrement

$$0 \leq \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right).$$

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1.$$

2. f) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1 ? Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$.

Pour tout entier naturel non nul k , on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \dots, X^{2n})$ est une base de E .

Si $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sont $2n + 1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k,$$

on définit le polynôme $s(Q)$ par

$$s(Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k.$$

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en inversant l'ordre des coefficients.

Par exemple, si $n = 2$ et $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient

$$s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4.$$

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

Partie A

1. Linéarité de s

Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2. Diagonalisation dans un cas particulier

2. a) On considère la matrice carrée d'ordre 3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

2. b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s .

3. Étude du cas général

On définit la famille de polynômes $(A_0, \dots, A_{2n})$, pour tout réel x , par

$$A_k(x) = \begin{cases} x^{2n-k} + x^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1, \\ x^n & \text{si } k = n, \\ x^k - x^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

3. a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.
3. b) Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$. Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.
3. c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 2n$.
3. d) Montrer que la famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ est libre.
3. e) En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

Partie B

1. Préliminaires

On définit une suite $(R_k)_{k \geq 1}$ de polynômes par, pour tout réel x ,

$$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2,$$

et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x).$$

1. a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4 .
1. b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant, pour tout réel x non nul, l'égalité

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$

1. c) Pour tout réel a , déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation

$$x + \frac{1}{x} = a.$$

2. Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k,$$

tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $\{0, \dots, n\}$, on ait

$$a_k = a_{2n-k}.$$

On définit alors le polynôme $\tilde{Q}$ par

$$\tilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k(x).$$

2. a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q .

2. b) Soit x un réel non nul, on pose $y = x + \frac{1}{x}$. Montrer que $\frac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\tilde{Q}(y)$ est nul. Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

2. c) On suppose que $n = 3$ et que Q est défini par

$$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1.$$

Déterminer les racines réelles de Q .

Partie C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $\{1, \dots, p\}$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par P la probabilité uniforme sur Ω , c'est-à-dire que, pour tout polynôme Q de Ω , on a

$$P(\{Q\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k de $\{0, \dots, 2n\}$ qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω , associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.

Par exemple, pour $n = 2$ et $p \geq 7$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.

1. Description d'un cas simple

Dans cette question, on suppose que $n = 1$ et $p = 2$. Écrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z .

2. Étude générale de la variable aléatoire Z

On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

Pour les comptages, on pourra regrouper les indices en paires $(k, 2n - k)$, avec $0 \leq k < n$, et traiter séparément le coefficient central a_n .

2. a) Calculer le cardinal de Ω .

2. b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité

$$P(Z = 1) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n.$$

2. c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n + 1$ et justifier l'égalité

$$P(Z = 2n + 1) = \frac{1}{p^n}.$$

2. d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leq j \leq n$, calculer $P(Z = 2j + 1)$.

On pourra choisir les j paires où l'égalité est réalisée, puis compter les possibilités pour les coefficients de chaque paire.

2. e) On pose $Y = \frac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p .