



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

2004

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1. Étude d'une suite et programmation

1. a) Pour $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto x^{n-1}/(1+x)$ est continue et positive sur $[0, 1]$, et strictement positive sur $]0, 1[$. Son intégrale existe et $c_n > 0$.

Sur $[0, 1]$, $x^n \leq x^{n-1}$, donc, par croissance de l'intégrale,

$$c_{n+1} \leq c_n.$$

Plus précisément,

$$c_n - c_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)}{1+x} dx > 0,$$

car l'intégrande est continue et strictement positive sur $]0, 1[$. La suite est donc strictement décroissante et ses termes sont strictement positifs.

1. b) Les deux intégrales portent sur des fonctions continues sur le même segment. Leur linéarité donne

$$c_{n+1} + c_n = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n}.$$

Cette égalité est valable pour tout $n \geq 1$.

1. c) La décroissance établie en 1.a donne $c_{n+1} \leq c_n$. Avec 1.b, il vient

$$\frac{1}{n} = c_n + c_{n+1} \leq 2c_n.$$

Pour $n \geq 2$, on a aussi $c_n \leq c_{n-1}$, donc

$$2c_n \leq c_{n-1} + c_n = \frac{1}{n-1}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \leq 2c_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

En multipliant par $n > 0$, on obtient $1 \leq 2nc_n \leq n/(n-1)$. Les deux bornes tendent vers 1, donc $2nc_n \rightarrow 1$. Par définition d'un équivalent,

$$c_n \sim \frac{1}{2n}.$$

1. d) On calcule d'abord

$$c_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Méthode 1 — Récurrence issue de 1.b

Pour $n = 2$, $c_2 = 1 - c_1 = 1 - \ln 2$, ce qui est bien la formule demandée.

Supposons, pour un entier $n \geq 2$, que

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right).$$

La relation $c_{n+1} = 1/n - c_n$ donne

$$c_{n+1} = \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right).$$

Comme $1/n = (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}/n$, on peut intégrer ce terme à la somme :

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right).$$

La récurrence prouve donc la formule pour tout $n \geq 2$.

Méthode 2 — Identité algébrique sous l'intégrale

Pour $n \geq 2$ et $x \in [0, 1]$, l'identité géométrique finie donne

$$\frac{x^{n-1}}{1+x} = \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j x^{n-2-j} + \frac{(-1)^{n-1}}{1+x}.$$

On peut vérifier cette identité en multipliant les deux membres par $1+x$: les termes intermédiaires s'annulent et il reste x^{n-1} . L'intégration terme à terme de cette somme finie fournit

$$c_n = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{n-1-j} + (-1)^{n-1} \ln 2.$$

En posant $k = n-1-j$, le signe devient $(-1)^{n-1-k} = (-1)^n (-1)^{k+1}$, d'où

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right).$$

La première méthode réutilise la relation entre deux termes successifs ; la seconde explique directement l'apparition de la somme alternée par une identité finie, sans utiliser de série infinie.

1. e) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La relation $c_{k+1} = 1/k - c_k$, initialisée avec $c_1 = \ln 2$, suffit. Le programme suivant suppose que l'entier saisi est strictement positif, conformément à l'énoncé.

Python

```
from math import log

def valeur_c(n):
    c = log(2)
    for k in range(1, n):
        c = 1 / k - c
    return c

n = int(input("Entier n strictement positif : "))
print(valeur_c(n))
```

Avant la boucle, c contient c_1 . À l'entrée du passage d'indice k , elle contient c_k ; après l'affectation, elle contient c_{k+1} . `range(1, n)` parcourt les entiers de 1 à $n - 1$: la valeur renvoyée est donc c_n . Pour $n = 1$, la boucle est vide et la valeur renvoyée est bien $\ln 2$.

La fonction a été exécutée pour $n = 1$, $n = 2$ et plusieurs autres valeurs, et comparée à l'intégrale définissant c_n . Les opérations de l'ordinateur produisent des approximations numériques; la récurrence prouvée en 1.b justifie le calcul mathématique.

2. Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

2. a) Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine est indiqué.

Pour $x > 1$, l'application $t \mapsto u = 1/t$ est de classe C^1 , strictement décroissante et bijective de $[1, x]$ sur $[1/x, 1]$. On a $t = 1/u$ et $dt = -du/u^2$. Par conséquent,

$$\frac{dt}{t^n(1+t)} = -\frac{u^{n-1}}{1+u} du.$$

Les bornes $t = 1$ et $t = x$ correspondent respectivement à $u = 1$ et $u = 1/x$. Il en résulte

$$\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = -\int_1^{1/x} \frac{u^{n-1}}{1+u} du = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du.$$

Pour $x = 1$, les deux intégrales sont nulles, donc la même égalité reste valable.

2. b) Pour $n \geq 1$, $c_n > 0$, donc f_n est positive. Elle est continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. En 1, ses limites à gauche et à droite sont respectivement 0 et $1/(2c_n)$, toutes deux finies.

D'après 2.a, pour $x \geq 1$,

$$\int_1^x f_n(t) dt = \frac{1}{c_n} \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du.$$

La fonction $u \mapsto u^{n-1}/(1+u)$ est continue sur $[0, 1]$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, son intégrale de $1/x$ à 1 tend vers son intégrale de 0 à 1, c'est-à-dire c_n . Cela établit la convergence de l'intégrale impropre et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f_n(t) dt = 1.$$

Toutes les conditions de caractérisation d'une densité sont donc satisfaites.

2. c) Comme $X_n \geq 1$, son espérance existe si et seulement si l'intégrale positive

$$\frac{1}{c_n} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n-1}(1+t)}$$

converge.

Pour $n = 1$, l'intégrale tronquée vaut

$$\frac{1}{c_1} \int_1^x \frac{dt}{1+t} = \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{\ln 2} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi X_1 n'admet pas d'espérance finie.

Pour $n \geq 2$, la formule de 2.a appliquée à l'entier $n-1 \geq 1$ donne, sur chaque segment $[1, x]$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t^{n-1}(1+t)} = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-2}}{1+u} du.$$

L'intégrande du membre de droite est continue sur $[0, 1]$; son intégrale tend vers $c_{n-1} < +\infty$. Comme l'intégrande est positive, la convergence est aussi absolue. On peut donc conclure

$$E(X_n) = \frac{c_{n-1}}{c_n}, \quad n \geq 2.$$

2. d) Si $x < 1$, $F_1(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, on utilise $c_1 = \ln 2$ et la décomposition $1/[t(1+t)] = 1/t - 1/(1+t)$:

$$F_1(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{\ln 2} [\ln t - \ln(1+t)]_1^x = \frac{\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)}{\ln 2}.$$

Ainsi,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)}{\ln 2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour $y < 1$, la probabilité demandée est nulle. Pour $y \geq 1$, comme $\ln 2 > 0$ et que l'exponentielle est strictement croissante,

$$F_1(y) \geq \frac{1}{2} \iff \frac{2y}{1+y} \geq \sqrt{2} \iff (2 - \sqrt{2})y \geq \sqrt{2}.$$

Le coefficient $2 - \sqrt{2}$ est strictement positif et $\sqrt{2}/(2 - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$. L'ensemble cherché est donc

$$[1 + \sqrt{2}, +\infty[.$$

Pour déterminer la loi de $Z = \ln(X_1)$, on passe par sa fonction de répartition. Comme $X_1 \geq 1$, $Z \geq 0$. Pour $z < 0$, $F_Z(z) = 0$; pour $z \geq 0$, la croissance stricte du logarithme donne

$$F_Z(z) = P(X_1 \leq e^z) = F_1(e^z) = \frac{\ln 2 + z - \ln(1 + e^z)}{\ln 2}.$$

Cette fonction est continue en 0, car sa valeur et sa limite à droite y sont nulles. Elle est de classe C^1 en dehors de 0, et, pour $z > 0$,

$$F'_Z(z) = \frac{1}{\ln 2} \left(1 - \frac{e^z}{1 + e^z} \right) = \frac{1}{(1 + e^z) \ln 2}.$$

Une densité de Z est donc

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ \frac{1}{(1 + e^z) \ln 2} & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

La valeur choisie en 0 ne change pas la loi. Les limites à gauche et à droite y sont finies : cette densité respecte le cadre demandé.

2. e) Fixons $x > 1$ et posons $J_n(x) = \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1 + u)^2} du$. Pour $u \in [1/x, 1]$,
 $0 \leq u^n/(1 + u)^2 \leq u^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq J_n(x) \leq \int_{1/x}^1 u^n du = \frac{1 - x^{-(n+1)}}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1}.$$

Le théorème d'encadrement entraîne donc $J_n(x) \rightarrow 0$.

Pour exprimer $F_n(x)$, on part de 2.a et on effectue une intégration par parties sur le segment $[1/x, 1]$, avec la primitive u^n/n de u^{n-1} et la fonction $1/(1 + u)$, toutes deux de classe C^1 sur ce segment :

$$\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1 + u} du = \left[\frac{u^n}{n(1 + u)} \right]_{1/x}^1 + \frac{1}{n} \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1 + u)^2} du.$$

Il vient

$$F_n(x) = \frac{1}{nc_n} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^{-n}}{1 + 1/x} + J_n(x) \right).$$

D'après 1.c, $nc_n \rightarrow 1/2$, donc $1/(nc_n) \rightarrow 2$; ces inverses sont bien définis puisque $c_n > 0$. Comme $x > 1$, la suite géométrique x^{-n} tend vers 0. La parenthèse tend donc vers $1/2$, et l'on conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1, \quad x > 1.$$

2. f) Pour $x < 1$, $X_n \geq 1$ entraîne $F_n(x) = 0$. Pour $x = 1$, une variable à densité ne charge pas un point, donc $F_n(1) = P(X_n = 1) = 0$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0, \quad x \leq 1.$$

Soit X la variable certaine égale à 1. Sa fonction de répartition vaut $F(x) = 0$ pour $x < 1$ et $F(x) = 1$ pour $x \geq 1$. Ses points de continuité sont exactement les réels différents de 1.

Pour $x < 1$, $F_n(x) \rightarrow 0 = F(x)$; pour $x > 1$, 2.e donne $F_n(x) \rightarrow 1 = F(x)$. La définition de la convergence en loi donne donc

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \quad P(X = 1) = 1.$$

Au point de discontinuité 1, la limite de $F_n(1)$ vaut 0 et diffère de $F(1)$. Cela n'empêche pas la convergence en loi, qui ne demande la convergence des fonctions de répartition qu'aux points de continuité de la fonction limite.

Problème

Partie A

On utilise les coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{2n})$ de $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$. Si Q a pour colonne de coordonnées $a = {}^t(a_0, \dots, a_{2n})$, la colonne de $s(Q)$ est ${}^t(a_{2n}, \dots, a_0)$. La matrice associée est la matrice J d'ordre $2n + 1$ dont les coefficients, indexés de 0 à $2n$, vérifient

$$J_{r,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } r + k = 2n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette représentation permet de traiter l'application concrète s au moyen d'une matrice réelle.

1. Linéarité de s

Pour tout $Q \in E$, $s(Q)$ est encore un polynôme de degré au plus $2n$: s prend bien ses valeurs dans E .

Soient $Q, R \in E$ de colonnes de coordonnées a, b , et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La colonne de $\alpha Q + \beta R$ est $\alpha a + \beta b$. Celle de son image par s est

$$J(\alpha a + \beta b) = \alpha J a + \beta J b,$$

qui est la colonne de $\alpha s(Q) + \beta s(R)$. L'unicité des coordonnées dans une base entraîne

$$s(\alpha Q + \beta R) = \alpha s(Q) + \beta s(R).$$

L'application s est donc linéaire de E dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de E .

2. Diagonalisation dans un cas particulier

2. a) La matrice réelle M est symétrique. Le résultat du programme affirmant que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable s'applique directement : M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer ses éléments propres sans déterminant, on remarque que

${}^t(M(u, v, w)) = {}^t(w, v, u)$ et que $M^2 = I_3$. Si $MV = \lambda V$ avec $V \neq 0$, on obtient $V = M^2V = \lambda^2V$, donc $\lambda^2 = 1$. Les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 .

Pour $\lambda = 1$, l'égalité ${}^t(M(u, v, w)) = {}^t(u, v, w)$ équivaut à $w = u$, sans condition sur v . Ainsi

$$E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ u \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Les deux colonnes indiquées sont libres, car leur combinaison nulle impose successivement $u = 0$ et $v = 0$. Elles forment une base de cet espace propre, de dimension 2.

Pour $\lambda = -1$, l'égalité ${}^t(M(u, v, w)) = -{}^t(u, v, w)$ équivaut à $w = -u$ et $v = 0$. Donc

$$E_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La colonne génératrice est non nulle et forme une base de cet espace de dimension 1. Les deux espaces contiennent des colonnes non nulles : 1 et -1 sont bien toutes les valeurs propres de M .

2. b) Pour $n = 1$, on a $s(1) = X^2$, $s(X) = X$ et $s(X^2) = 1$. Leurs colonnes de coordonnées dans $(1, X, X^2)$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elles constituent exactement les colonnes de M , donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = M$.

Les colonnes propres de 2.a correspondent aux polynômes $1 + X^2$, X et $1 - X^2$. Les deux premiers ont pour valeur propre 1, le troisième a pour valeur propre -1 . Les colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$, donc les polynômes forment une base de E :

$$(1 + X^2, X, 1 - X^2)$$

est une base de vecteurs propres pour s .

3. Étude du cas général

3. a) La matrice J inverse l'ordre des coordonnées. Appliquée deux fois à une colonne a , elle redonne cette colonne : $J^2 a = a$ pour toute colonne a . Par conséquent $J^2 = I_{2n+1}$.

Le lien entre composition et produit matriciel donne alors

$$s \circ s = \text{Id}_E.$$

3. b) Soit $P \neq 0$ tel que $s(P) = \lambda P$. Par linéarité et par 3.a,

$$P = s \circ s(P) = s(\lambda P) = \lambda s(P) = \lambda^2 P.$$

Le polynôme P étant non nul, sa colonne de coordonnées est non nulle ; $(\lambda^2 - 1)P = 0$ impose $\lambda^2 = 1$. Ainsi toute valeur propre de s , ou de sa matrice J , appartient à $\{1, -1\}$.

3. c) Pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$, la définition donne $s(X^k) = X^{2n-k}$. On en déduit :

Si $0 \leq k \leq n-1$,

$$s(A_k) = s(X^{2n-k} + X^k) = X^k + X^{2n-k} = A_k.$$

Si $k = n$, $s(A_n) = s(X^n) = X^n = A_n$.

Si $n+1 \leq k \leq 2n$,

$$s(A_k) = s(X^k - X^{2n-k}) = X^{2n-k} - X^k = -A_k.$$

Tous les A_k sont non nuls. Leurs colonnes dans $\mathcal{B}$ sont donc des colonnes propres de J , de valeur propre 1 pour $0 \leq k \leq n$ et -1 pour $n+1 \leq k \leq 2n$.

3. d) Méthode 1 — Comparaison des coordonnées

Supposons

$$\sum_{k=0}^{2n} t_k A_k = 0,$$

avec $t_k \in \mathbb{R}$. Pour chaque $k < n$, seuls $A_k = X^{2n-k} + X^k$ et $A_{2n-k} = X^{2n-k} - X^k$ contribuent aux degrés k et $2n-k$. Les coordonnées de ces deux degrés donnent

$$t_k - t_{2n-k} = 0, \quad t_k + t_{2n-k} = 0.$$

En ajoutant puis en soustrayant ces égalités, on obtient $t_k = 0$ et $t_{2n-k} = 0$. La coordonnée de degré n est t_n , donc $t_n = 0$. Tous les coefficients de la relation sont nuls : $(A_0, \dots, A_{2n})$ est libre.

Méthode 2 — Familles propres associées à deux valeurs propres distinctes

Dans la famille $(A_0, \dots, A_n)$, les degrés valent respectivement $2n, 2n-1, \dots, n+1, n$. Ils sont distincts. Dans une combinaison linéaire nulle de ces polynômes, le terme de degré le plus élevé ne peut être annulé que si son coefficient est nul ; en répétant cet argument sur les degrés suivants, tous les coefficients sont nuls. Cette famille est donc libre.

Les polynômes $(A_{n+1}, \dots, A_{2n})$ ont pour degrés distincts $n+1, \dots, 2n$; le même raisonnement prouve leur liberté.

Leurs colonnes de coordonnées sont, d'après 3.c, des familles libres de colonnes propres de J associées respectivement à 1 et -1 . Le résultat du programme sur la réunion de familles libres d'espaces propres associés à des valeurs propres distinctes montre que leur réunion est libre dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. L'identification par les coordonnées prouve la liberté de $(A_0, \dots, A_{2n})$ dans E .

La première méthode donne directement les équations à résoudre ; la seconde utilise la séparation en deux valeurs propres et peut être réemployée lorsqu'une famille est déjà répartie en groupes propres.

3. e) La famille $(A_0, \dots, A_{2n})$ est libre et comporte $2n+1 = \dim E$ éléments : c'est une base de E .

Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de ces polynômes dans $\mathcal{B}$. Comme ces colonnes forment une base, P est inversible. Les égalités de 3.c se traduisent par

$$JP = PD, \quad D = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1 \text{ termes}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_n).$$

Il en résulte $P^{-1}JP = D$. La matrice de s est donc diagonalisable; dans la base des A_k , sa matrice est D .

Pour préciser exactement les espaces propres, écrivons un polynôme

$$U = \sum_{k=0}^{2n} t_k A_k.$$

L'égalité $s(U) = U$ impose $t_k = 0$ pour $k > n$; l'égalité $s(U) = -U$ impose $t_k = 0$ pour $k \leq n$. Ainsi

$$E_1(s) = \text{Vect}(A_0, \dots, A_n), \quad \dim E_1(s) = n + 1,$$

$$E_{-1}(s) = \text{Vect}(A_{n+1}, \dots, A_{2n}), \quad \dim E_{-1}(s) = n.$$

Puisque $n \geq 1$, ces deux dimensions sont strictement positives. Les valeurs propres sont exactement 1 et -1 .

Partie B

1. Préliminaires

1. a) La relation de récurrence donne

$$R_3(x) = xR_2(x) - R_1(x) = x(x^2 - 2) - x = x^3 - 3x,$$

puis

$$R_4(x) = xR_3(x) - R_2(x) = x(x^3 - 3x) - (x^2 - 2) = x^4 - 4x^2 + 2.$$

1. b) On montre d'abord par récurrence que R_k est un polynôme unitaire de degré k .

C'est vrai pour $R_1 = X$ et $R_2 = X^2 - 2$. Si R_k et R_{k-1} sont unitaires de degrés k et $k - 1$, alors XR_k est unitaire de degré $k + 1$; lui soustraire R_{k-1} , de degré $k - 1$, ne modifie pas le terme dominant. Donc R_{k+1} est unitaire de degré $k + 1$. Cela établit le résultat pour tout $k \geq 1$.

Fixons ensuite un réel $x \neq 0$ et posons $y = x + 1/x$. On a

$$R_1(y) = x + x^{-1},$$

$$R_2(y) = (x + x^{-1})^2 - 2 = x^2 + x^{-2}.$$

Supposons, pour $k \geq 2$, que les identités soient vraies aux rangs k et $k - 1$. Alors

$$R_{k+1}(y) = (x + x^{-1})(x^k + x^{-k}) - (x^{k-1} + x^{-(k-1)}).$$

En développant le produit fini, on obtient

$$R_{k+1}(y) = x^{k+1} + x^{1-k} + x^{k-1} + x^{-(k+1)} - x^{k-1} - x^{1-k} = x^{k+1} + x^{-(k+1)}.$$

La récurrence donne donc, pour tout $k \geq 1$ et tout réel $x \neq 0$,

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$

1. c) Pour $x \neq 0$, l'équation $x + 1/x = a$ équivaut à $x^2 - ax + 1 = 0$. Son discriminant est $a^2 - 4$.

Si $-2 < a < 2$, le discriminant est strictement négatif : il n'existe aucune solution réelle.

Si $a = 2$, l'équation est $(x - 1)^2 = 0$: l'unique solution est $x = 1$.

Si $a = -2$, l'équation est $(x + 1)^2 = 0$: l'unique solution est $x = -1$.

Si $|a| > 2$, les deux solutions réelles distinctes sont

$$x_- = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad x_+ = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Leur produit vaut 1, donc elles sont non nulles et vérifient bien l'équation initiale.

Toutes les solutions réelles ont ainsi été déterminées.

2. Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1

2. a) La relation entre les coefficients donne $a_0 = a_{2n} \neq 0$. Comme $Q(0) = a_0$, on a $Q(0) \neq 0$: 0 n'est pas racine de Q .

2. b) On regroupe les termes de degrés symétriques par rapport à n . Pour $x \neq 0$,

$$\frac{Q(x)}{x^n} = a_n + \sum_{k=1}^n (a_{n-k}x^{-k} + a_{n+k}x^k).$$

Or $a_{n+k} = a_{n-k}$, donc

$$\frac{Q(x)}{x^n} = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k}(x^k + x^{-k}).$$

En posant $y = x + 1/x$ et en appliquant 1.b, il vient

$$\frac{Q(x)}{x^n} = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k}R_k(y) = \tilde{Q}(y).$$

On a ainsi une identité, dont découle l'équivalence demandée :

$$\frac{Q(x)}{x^n} = 0 \iff \tilde{Q}(y) = 0.$$

Puisque $x^n \neq 0$, cela équivaut aussi à $Q(x) = 0$. Le polynôme $\tilde{Q}$ est de degré n : son terme dominant provient de a_0R_n , avec $a_0 \neq 0$, tandis que les autres termes ont un degré inférieur.

La recherche des racines réelles d'un polynôme de degré $2n$ se ramène donc à celle des racines réelles y de $\tilde{Q}$, de degré n , puis à des équations du second degré $x^2 - yx + 1 = 0$. D'après 1.c, seules les racines y vérifiant $|y| \geq 2$ donnent des solutions réelles. Aucune racine $x = 0$ n'a été perdue, grâce à 2.a.

2. c) Question adaptée au programme actuel : seules les racines réelles sont recherchées.

Ici $a_3 = 2$, $a_2 = -9$, $a_1 = 1$ et $a_0 = 1$. En utilisant 1.a,

$$\tilde{Q}(y) = 2 - 9R_1(y) + R_2(y) + R_3(y) = 2 - 9y + (y^2 - 2) + (y^3 - 3y).$$

Donc

$$\widetilde{Q}(y) = y^3 + y^2 - 12y = y(y + 4)(y - 3).$$

Ses racines sont 0, -4 et 3 . La valeur $y = 0$ ne donne pas de solution réelle de $x + 1/x = 0$, d'après 1.c.

Pour $y = -4$, on résout $x^2 + 4x + 1 = 0$, dont les solutions sont $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

Pour $y = 3$, on résout $x^2 - 3x + 1 = 0$, dont les solutions sont $(3 - \sqrt{5})/2$ et $(3 + \sqrt{5})/2$.

Les deux premières sont négatives et distinctes ; les deux dernières sont positives et distinctes. Ce sont exactement les quatre racines réelles de Q :

$$-2 - \sqrt{3}, \quad -2 + \sqrt{3}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

L'identité obtenue en 2.b fournit aussi la factorisation réelle

$$Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4x + 1)(x^2 - 3x + 1).$$

Le facteur $x^2 + 1$ est strictement positif pour tout réel x ; les quatre racines trouvées sont donc simples, et la factorisation confirme qu'il n'y en a pas d'autres sur $\mathbb{R}$.

Partie C

Le coefficient central a_n coïncide toujours avec lui-même. Pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, les deux indices k et $2n - k$ fournissent soit deux coïncidences, lorsque $a_k = a_{2n-k}$, soit aucune. Les comptages ci-dessous tiennent compte de cette distinction.

La formulation de la probabilité uniforme porte sur les issues $Q \in \Omega$. L'exemple du préambule appartient à Ω dès que $p \geq 7$, condition précisée dans le sujet.

1. Description d'un cas simple

Avec $n = 1$ et $p = 2$, les trois coefficients a_0, a_1, a_2 prennent chacun les valeurs 1 ou 2. Les huit éléments de Ω et les valeurs de Z sont les suivants.

Polynôme Q	$Z(Q)$
$X^2 + X + 1$	3
$X^2 + X + 2$	1
$X^2 + 2X + 1$	3
$X^2 + 2X + 2$	1
$2X^2 + X + 1$	1
$2X^2 + X + 2$	3
$2X^2 + 2X + 1$	1
$2X^2 + 2X + 2$	3

Ces huit polynômes sont équiprobables. La valeur 3 correspond à $a_0 = a_2$, et la valeur 1 à $a_0 \neq a_2$. Chacune apparaît quatre fois, donc

$$P(Z = 1) = P(Z = 3) = \frac{1}{2}.$$

La variable est à valeurs dans un ensemble fini, donc elle possède une espérance et une variance. On calcule

$$E(Z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2, \quad E(Z^2) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5.$$

La formule de Koenig-Huygens donne finalement

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 5 - 4 = 1.$$

2. Étude générale de la variable aléatoire Z

2. a) Un polynôme de Ω est déterminé de manière unique par sa liste de $2n + 1$ coefficients. Il y a p possibilités pour chacun des coefficients et chaque liste est admissible. En choisissant successivement les coefficients, on obtient

$$\text{Card}(\Omega) = p^{2n+1}.$$

La probabilité de chaque polynôme est donc $p^{-(2n+1)}$.

2. b) Question adaptée au programme actuel : les comptages sont guidés par les paires d'indices.

L'indice central n donne toujours une coïncidence, donc $Z \geq 1$. Cette valeur est atteinte : on peut choisir $a_k = 1$ pour $k < n$, $a_k = 2$ pour $k > n$ et $a_n = 1$. Ces choix sont possibles puisque $p \geq 2$; aucune paire non centrale n'a alors de coefficients égaux.

L'événement $[Z = 1]$ signifie que les coefficients des n paires non centrales sont tous distincts deux à deux à l'intérieur de chaque paire. Pour une paire donnée, on choisit le premier coefficient de p façons, puis le second de $p - 1$ façons. Les différentes paires utilisent des indices distincts; en effectuant successivement les choix, on compte $[p(p - 1)]^n$ possibilités pour elles. Le coefficient central se choisit de p façons.

Le nombre de polynômes favorables vaut donc $p[p(p - 1)]^n$. Par équiprobabilité,

$$P(Z = 1) = \frac{p[p(p - 1)]^n}{p^{2n+1}} = \left(\frac{p - 1}{p}\right)^n.$$

2. c) Il y a $2n + 1$ indices, donc $Z \leq 2n + 1$. La borne est atteinte lorsque tous les coefficients valent 1, par exemple.

Pour que $Z = 2n + 1$, il faut et il suffit que les deux coefficients de chacune des n paires soient égaux. Dans chaque paire, le choix de leur valeur commune offre p possibilités, et le coefficient central offre encore p possibilités. Il y a donc p^{n+1} issues favorables. Ainsi

$$P(Z = 2n + 1) = \frac{p^{n+1}}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p^n}.$$

2. d) Question adaptée au programme actuel : un guidage du choix des paires est fourni.

Si exactement j des n paires non centrales ont leurs deux coefficients égaux, elles fournissent $2j$ coïncidences; le coefficient central en fournit une de plus. On a donc $Z = 2j + 1$. Par conséquent Z ne peut prendre que les valeurs impaires $1, 3, \dots, 2n + 1$.

Fixons $j \in \{0, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{j}$ choix des j paires où l'égalité est réalisée. Une fois ces paires fixées, chacune d'elles offre p choix de valeur commune. Chacune des $n - j$ autres paires offre $p(p - 1)$ choix de coefficients distincts. Enfin, le coefficient central offre p

choix. Ces choix déterminent entièrement le polynôme et ne comptent aucune issue deux fois, car l'ensemble des paires égales est déterminé par ses coefficients.

Le nombre de polynômes tels que $Z = 2j + 1$ vaut

$$\binom{n}{j} p^j [p(p-1)]^{n-j} p.$$

En divisant par p^{2n+1} , on obtient

$$P(Z = 2j + 1) = \binom{n}{j} \frac{(p-1)^{n-j}}{p^n} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p}\right)^j \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-j}.$$

Cette formule vaut aussi aux extrémités $j = 0$ et $j = n$ et redonne les résultats de 2.b et 2.c. Comme $p \geq 2$, tous ces nombres sont strictement positifs : toutes les valeurs impaires indiquées sont effectivement prises.

2. e) Méthode 1 — Reconnaissance de la loi obtenue

La variable $Y = (Z - 1)/2$ prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Pour chaque j de cet ensemble, les événements $[Y = j]$ et $[Z = 2j + 1]$ sont égaux. D'après 2.d,

$$P(Y = j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p}\right)^j \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-j}.$$

C'est la loi binomiale de paramètres n et $1/p$:

$$Y \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{p}\right).$$

Méthode 2 — Somme d'indicatrices indépendantes

Pour $k \in \{0, \dots, 2n\}$, désignons par C_k la variable donnant le coefficient a_k du polynôme tiré au hasard. Si l'on fixe les valeurs de r coefficients à des indices distincts, les $2n + 1 - r$ autres coefficients sont libres. Il y a donc p^{2n+1-r} issues réalisant ces valeurs,

et leur probabilité vaut

$$\frac{p^{2n+1-r}}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p^r} = \prod_{\ell=1}^r \frac{1}{p}.$$

Chaque C_k suit ainsi la loi uniforme sur $\{1, \dots, p\}$, et la factorisation précédente prouve l'indépendance mutuelle de ces variables.

Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, posons $B_k = \mathbf{1}_{[C_k=C_{2n-k}]}$. L'indépendance des deux coefficients d'une paire donne

$$P(B_k = 1) = \sum_{a=1}^p P(C_k = a, C_{2n-k} = a) = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Les paires d'indices sont disjointes ; le lemme des coalitions entraîne l'indépendance mutuelle des B_k . Ce sont donc n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/p$. Le nombre de paires égales est leur somme, et

$$Z = 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} B_k.$$

Par conséquent

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{p}\right).$$

La première méthode identifie la loi grâce au comptage précédent ; la seconde explique la structure binomiale par des essais indépendants.

Pour conclure sur les moments, les variables sont à valeurs finies et tous les moments utilisés existent. Les formules de la loi binomiale donnent

$$E(Y) = \frac{n}{p}, \quad V(Y) = \frac{n}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{n(p-1)}{p^2}.$$

Comme $Z = 2Y + 1$, la linéarité de l'espérance et la formule de variance d'une transformation affine entraînent

$$E(Z) = 1 + \frac{2n}{p}, \quad V(Z) = \frac{4n(p-1)}{p^2}.$$

Pour $n = 1$ et $p = 2$, ces expressions donnent $E(Z) = 2$ et $V(Z) = 1$, en accord avec le cas simple étudié en C.1.

Relevé des adaptations

- Exercice, 1.e : Code adapté en Python ; documentation des commandes de saisie, de conversion, d'affichage et de logarithme.
- Exercice, 2.a : indication du changement de variable non affine $u = 1/t$, comme le demande le programme actuel.
- Problème, B.2.c : la recherche des racines est explicitement limitée aux racines réelles, conformément au cadre du sujet adapté.
- Problème, préambule C : formulation corrigée en « probabilité uniforme sur Ω » ; précision de l'ensemble des indices comptés ; ajout de $p \geq 7$ pour que le polynôme de l'exemple, qui contient un coefficient égal à 7, appartienne bien à Ω .
- Problème, C.2.b-d : guidage des comptages par les paires d'indices et le choix des paires égales, sans supposer connu un chapitre général de dénombrement.