



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1999

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, Id l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^4$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On considère les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On désigne respectivement par φ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ représentés par L et M dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. (a) Montrer que φ et ψ sont des automorphismes de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer les automorphismes réciproques.
1. (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme φ . Déterminer de même les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ψ .
1. (c) Montrer que l'on peut trouver un vecteur f_1 non nul de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $\varphi(f_1) = f_1$ et $\psi(f_1) = f_1$.
1. (d) Déterminer, plus généralement, une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dont chaque vecteur est à la fois un vecteur propre de φ et un vecteur propre de ψ . Donner la matrice L' de φ et la matrice M' de ψ dans cette base $\mathcal{F}$.
2. On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{C}$ des endomorphismes γ de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $\gamma \circ \varphi = \varphi \circ \gamma$ et $\gamma \circ \psi = \psi \circ \gamma$.

2. (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ qui contient φ et ψ .
2. (b) Montrer que, si $\gamma \in \mathcal{C}$ et $\gamma' \in \mathcal{C}$, alors $\gamma \circ \gamma' \in \mathcal{C}$.
2. (c) Soit $\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et soit G la matrice de γ dans la base $\mathcal{F}$, constituée de vecteurs propres de φ et ψ , déterminée à la question 1. (d). Montrer que $\gamma \in \mathcal{C}$ si et seulement si G est une matrice diagonale.
2. (d) En déduire que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et que les endomorphismes Id , φ , ψ et $\varphi \circ \psi$ forment une base de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

On considère un entier naturel $N \geq 3$, et on note $\{1, 2, \dots, N\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à N .

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On y effectue des tirages successifs indépendants, chaque boule ayant la probabilité $1/N$ d'être tirée, avec remise de la boule tirée après chaque tirage, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors T_N le rang aléatoire de ce dernier tirage.

Ainsi, pour des tirages successifs 1, 5, 4, 7, 3, 5, la variable T_N prend la valeur 6, alors que, pour les tirages 5, 4, 2, 2, elle prend la valeur 4.

On admet qu'on définit ainsi une variable aléatoire sur un espace probabilisé, dont la probabilité est notée P . Toutes les variables aléatoires introduites dans le problème sont supposées définies sur cet espace. Si Z est une telle variable, son espérance est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

Les parties II et III sont indépendantes.

I. Étude de la variable aléatoire T_N

1. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $N = 3$. Déterminer la loi de T_3 et calculer son espérance et sa variance.
2. On revient désormais au cas général où $N \geq 3$.
 2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre T_N .
 2. (b) Calculer $P(T_N = 2)$, $P(T_N = 3)$ et $P(T_N = N + 1)$.
 2. (c) Prouver, pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, les égalités

$$P(T_N > k) = \frac{N!}{(N - k)!N^k} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right).$$

En déduire la loi de la variable aléatoire T_N .

2. (d) Déterminer, pour tout entier naturel k fixé, la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(T_N > k)$.
Pouvait-on prévoir ce résultat?

II. Étude d'un algorithme

Dans le programme Python suivant, la commande `rd.randint(a, b, size=m)` renvoie un tableau de m entiers aléatoires indépendants, chacun uniforme parmi $a, a + 1, \dots, b - 1$. Les tableaux sont indexés à partir de 0; le tirage de rang r est donc stocké dans `T[r - 1]`. La fonction `X` renvoie le tableau des tirages. La commande `print` affiche ses arguments et passe à la ligne.

Python

```
import numpy.random as rd

def X():
    return rd.randint(1, 20001, size=20001)

T = X()
i = 1
coincide = False
while not coincide:
    i = i + 1
    S = 0
    while S < i - 1 and not coincide:
        S = S + 1
        if T[S - 1] == T[i - 1]:
            coincide = True
U = i
for n in range(i):
    print(T[n], ", ")
print()
print("U= ", U)
print("S= ", S)
```

- a) Que fait la fonction X?
- b) Que représentent les variables U et S à la fin du programme?
- c) Pourquoi est-il certain que le nombre de passages dans la première boucle while est fini?

III. Étude du comportement asymptotique de la suite $(T_N)_{N \geq 3}$

1. Une formule pour l'espérance de T_N .

1. (a) Justifier l'égalité suivante :

$$E(T_N) = \sum_{k=0}^N P(T_N > k).$$

1. (b) En déduire l'égalité

$$E(T_N) = \frac{N!}{N^N} \sum_{h=0}^N \frac{N^h}{h!}.$$

2. Un résultat utile sur les lois de Poisson.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre 1 et soit, pour tout entier $N \geq 1$, $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$.

2. (a) Montrer par récurrence sur N que la loi de Y_N est une loi de Poisson de paramètre N . Donner l'espérance et la variance de Y_N .

2. (b) Justifier l'égalité

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\frac{Y_N - N}{\sqrt{N}} \leq 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt.$$

2. (c) En déduire l'égalité

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(Y_N \leq N) = \frac{1}{2}.$$

3. En appliquant ce résultat, montrer que $E(T_N)$ est équivalent à $\frac{1}{2} \frac{N! e^N}{N^N}$ quand N tend vers l'infini.

4. Une expression de la variance de T_N .

4. (a) Montrer l'égalité

$$E(T_N^2) = \sum_{k=0}^N (2k+1)P(T_N > k).$$

4. (b) Établir la relation

$$\sum_{k=0}^N kP(T_N > k) = \frac{N!}{N^N} \sum_{h=0}^N (N-h) \frac{N^h}{h!}.$$

4. (c) Montrer l'égalité

$$\sum_{h=0}^N (N-h) \frac{N^h}{h!} = \frac{N^{N+1}}{N!}.$$

4. (d) En déduire que la variance de T_N et son espérance vérifient la relation

$$V(T_N) = 2N + E(T_N) - (E(T_N))^2.$$

5. On admet le résultat particulier suivant concernant la variable T_N de ce problème :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(T_N)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donner, en conclusion, des équivalents simples de $E(T_N)$ et de $V(T_N)$.