



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1999

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

On travaille avec les matrices représentant les endomorphismes. Pour $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, les matrices de l'énoncé donnent

$$\varphi(v) = (x_2, x_1, x_4, x_3), \quad \psi(v) = (x_3, x_4, x_1, x_2).$$

1. (a) L'application de chacune de ces permutations deux fois restitue les coordonnées initiales. Ainsi $L^2 = M^2 = I$, donc $\varphi \circ \varphi = \psi \circ \psi = \text{Id}$.

Les deux endomorphismes sont par conséquent bijectifs et

$$\varphi^{-1} = \varphi, \quad \psi^{-1} = \psi.$$

1. (b) Si λ est une valeur propre de L et $v \neq 0$ un vecteur propre associé, alors $L^2 v = v$ et $L^2 v = \lambda^2 v$. Il s'ensuit que $\lambda^2 = 1$: les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 .

Pour $\lambda = 1$, l'égalité $\varphi(v) = v$ équivaut à $x_2 = x_1$ et $x_4 = x_3$. Pour $\lambda = -1$, elle équivaut à $x_2 = -x_1$ et $x_4 = -x_3$. On obtient

$$E_1(\varphi) = \{(a, a, b, b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)),$$

$$E_{-1}(\varphi) = \{(a, -a, b, -b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)).$$

Ces deux espaces contiennent des vecteurs non nuls ; 1 et -1 sont donc bien toutes les valeurs propres de φ . Les deux vecteurs indiqués dans chaque famille sont indépendants, comme le montrent leurs première et troisième coordonnées : chaque sous-espace propre a dimension 2.

De même, $M^2 = I$ limite les valeurs propres possibles de ψ à 1 et -1 . Les égalités $\psi(v) = v$ et $\psi(v) = -v$ conduisent respectivement à

$$E_1(\psi) = \{(a, b, a, b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)),$$

$$E_{-1}(\psi) = \{(a, b, -a, -b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)).$$

Les familles présentées sont indépendantes par lecture des première et deuxième coordonnées. Ces espaces ont dimension 2 et sont non nuls. Le spectre de ψ est donc également $\{-1, 1\}$.

1. (c) On cherche un vecteur appartenant à $E_1(\varphi) \cap E_1(\psi)$. D'après les descriptions précédentes, ses quatre coordonnées doivent être égales. On peut donc choisir

$$f_1 = (1, 1, 1, 1).$$

Ce vecteur est non nul et les formules donnant φ et ψ confirment $\varphi(f_1) = \psi(f_1) = f_1$.

1. (d) Pour $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$, les deux équations $\varphi(v) = \varepsilon v$ et $\psi(v) = \eta v$ imposent

$$v = a(1, \varepsilon, \eta, \varepsilon\eta), \quad a \in \mathbb{R}.$$

En effet, la deuxième coordonnée vaut εa , la troisième ηa et la quatrième $\varepsilon\eta a$; ces relations vérifient aussi toutes les autres équations. Les quatre choix des signes donnent

$$f_1 = (1, 1, 1, 1), \quad f_2 = (1, 1, -1, -1), \quad f_3 = (1, -1, 1, -1), \quad f_4 = (1, -1, -1, 1).$$

Pour prouver qu'ils forment une base, considérons leur matrice de colonnes

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit de cette matrice par elle-même a ses coefficients diagonaux égaux à 4, et

chacun de ses autres coefficients est une somme de deux 1 et de deux -1 . Ainsi $P^2 = 4I$ et $P^{-1} = P/4$. La matrice P est inversible, ce qui prouve que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Les valeurs propres sur les vecteurs de cette base donnent directement

$$L' = \text{diag}(1, 1, -1, -1), \quad M' = \text{diag}(1, -1, 1, -1).$$

2. (a) Commençons par vérifier que φ et ψ commutent. Pour tout $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$\varphi(\psi(v)) = (x_4, x_3, x_2, x_1) = \psi(\varphi(v)).$$

Leurs matrices vérifient donc $LM = ML$.

L'endomorphisme nul commute avec φ et ψ , donc appartient à $\mathcal{C}$. Si $\gamma, \delta \in \mathcal{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la distributivité de la composition donne

$$(a\gamma + b\delta) \circ \varphi = a(\gamma \circ \varphi) + b(\delta \circ \varphi) = \varphi \circ (a\gamma + b\delta).$$

La même égalité avec ψ montre que $a\gamma + b\delta \in \mathcal{C}$. Ainsi $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

Enfin, φ commute avec lui-même et avec ψ ; ψ commute avec lui-même et avec φ . Les deux endomorphismes appartiennent donc à $\mathcal{C}$.

2. (b) Utilisons l'associativité de la composition et les deux commutations avec φ :

$$(\gamma \circ \gamma') \circ \varphi = \gamma \circ (\gamma' \circ \varphi) = \gamma \circ (\varphi \circ \gamma') = (\gamma \circ \varphi) \circ \gamma' = (\varphi \circ \gamma) \circ \gamma' = \varphi \circ (\gamma \circ \gamma').$$

En remplaçant φ par ψ dans ce calcul, on établit également la commutation avec ψ . Par définition,

$$\gamma \circ \gamma' \in \mathcal{C}.$$

2. (c) Les égalités d'endomorphismes sont équivalentes aux égalités de leurs matrices dans une même base. Ainsi

$$\gamma \in \mathcal{C} \iff GL' = L'G \text{ et } GM' = M'G.$$

Posons $L' = \text{diag}(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$, $M' = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4)$ et $G = (g_{ij})$. Les coefficients des deux égalités précédentes donnent, pour tout couple (i, j) ,

$$(\ell_j - \ell_i)g_{ij} = 0, \quad (m_j - m_i)g_{ij} = 0.$$

Les quatre couples (ℓ_i, m_i) valent successivement $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$. Ils sont deux à deux distincts. Si $i \neq j$, au moins l'une des différences $\ell_j - \ell_i$ et $m_j - m_i$ est non nulle; donc $g_{ij} = 0$. Toute matrice d'un élément de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}$ est par conséquent diagonale.

Réciproquement, une matrice diagonale commute avec les deux matrices diagonales L' et M' : les deux produits ont, à chaque place diagonale, le produit des mêmes réels. Si G est diagonale, les égalités requises sont donc satisfaites, et $\gamma \in \mathcal{C}$.

On a bien l'équivalence annoncée.

2. (d) L'application associant à un endomorphisme sa matrice dans $\mathcal{F}$ est linéaire et bijective. La question précédente identifie $\mathcal{C}$ à l'espace des matrices diagonales d'ordre 4, lui-même identifié à $\mathbb{R}^4$ par lecture des quatre coefficients diagonaux. Ainsi

$$\dim \mathcal{C} = 4.$$

L'identité appartient à $\mathcal{C}$, et les questions 2. (a) et 2. (b) montrent que φ , ψ et $\varphi \circ \psi$ lui appartiennent aussi. Leurs matrices dans $\mathcal{F}$ sont respectivement

$$I, \quad \text{diag}(1, 1, -1, -1), \quad \text{diag}(1, -1, 1, -1), \quad \text{diag}(1, -1, -1, 1).$$

Pour vérifier leur indépendance, supposons que $a \text{Id} + b\varphi + c\psi + d\varphi \circ \psi = 0$. Les quatre coefficients diagonaux donnent

$$a + b + c + d = 0, \quad a + b - c - d = 0, \quad a - b + c - d = 0, \quad a - b - c + d = 0.$$

La somme des quatre égalités donne $4a = 0$. Leur combinaison avec les signes $(+, +, -, -)$ donne $4b = 0$, celle avec $(+, -, +, -)$ donne $4c = 0$ et celle avec $(+, -, -, +)$ donne $4d = 0$. Tous les coefficients sont nuls.

Cette famille libre de quatre éléments d'un espace de dimension 4 est donc une base de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Le premier tirage ne peut pas être une répétition. Parmi $N + 1$ tirages, au moins deux numéros sont égaux, puisqu'il n'existe que N numéros possibles. Ainsi, pour chaque réalisation,

$$2 \leq T_N \leq N + 1.$$

En particulier, T_N est bornée : toutes les espérances et variances utilisées ci-dessous existent et les sommes de probabilités manipulées sont finies.

Question adaptée au programme actuel : le préambule explicite que les tirages sont indépendants et uniformes, hypothèses nécessaires aux calculs de la loi et à la simulation.

I. Étude de la variable aléatoire T_N

1. Pour $N = 3$, on a $T_3 \in \{2, 3, 4\}$. Le deuxième numéro reproduit le premier avec probabilité $1/3$, donc $P(T_3 = 2) = 1/3$.

Pour que $T_3 = 3$, les deux premiers numéros doivent être distincts, ce qui a probabilité $2/3$, puis le troisième doit être l'un de ces deux numéros, ce qui a probabilité conditionnelle $2/3$. L'indépendance des tirages et leur uniformité donnent

$$P(T_3 = 3) = \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Enfin, $T_3 = 4$ si les trois premiers numéros sont distincts ; le quatrième reproduit alors nécessairement l'un d'eux. Ainsi

$$P(T_3 = 4) = \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Ces probabilités ont pour somme 1. La loi est donc

t	2	3	4
$P(T_3 = t)$	$1/3$	$4/9$	$2/9$

Les définitions de l'espérance et du moment d'ordre deux donnent

$$E(T_3) = 2 \frac{1}{3} + 3 \frac{4}{9} + 4 \frac{2}{9} = \frac{26}{9},$$

$$E(T_3^2) = 4 \frac{1}{3} + 9 \frac{4}{9} + 16 \frac{2}{9} = \frac{80}{9}.$$

Par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(T_3) = \frac{80}{9} - \left(\frac{26}{9}\right)^2 = \frac{44}{81}.$$

2. (a) L'encadrement du préambule montre que le support est inclus dans $\{2, 3, \dots, N + 1\}$. Réciproquement, pour tout r dans cet ensemble, on peut obtenir successivement les numéros 1, 2, $\dots$, $r - 1$, puis à nouveau 1. Ce scénario, de probabilité $N^{-r} > 0$, donne $T_N = r$. Le support exact est donc

$$T_N(\Omega) = \{2, 3, \dots, N + 1\}.$$

2. (b) Une répétition au deuxième tirage a probabilité $1/N$:

$$P(T_N = 2) = \frac{1}{N}.$$

Pour une répétition exactement au troisième tirage, les deux premiers numéros doivent être distincts, puis le troisième doit être l'un des deux :

$$P(T_N = 3) = \frac{N-1}{N} \frac{2}{N} = \frac{2(N-1)}{N^2}.$$

Enfin, $T_N = N + 1$ signifie que les N premiers tirages ont donné les N numéros distincts. Le premier tirage est libre, le deuxième a $N - 1$ choix nouveaux, puis le troisième en a $N - 2$, jusqu'au dernier qui n'en a qu'un. Par probabilités composées,

$$P(T_N = N + 1) = 1 \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} \dots \frac{1}{N} = \frac{N!}{N^N}.$$

2. (c) Pour $1 \leq k \leq N$, l'événement $\{T_N > k\}$ signifie exactement que les k premiers numéros sont distincts. Si les i premiers numéros sont distincts, le tirage suivant, indépendant et uniforme, évite ces numéros avec probabilité $(N - i)/N$. Par probabilités composées,

$$P(T_N > k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{N-i}{N} = \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k} = \frac{N!}{(N-k)!N^k}.$$

Pour obtenir la loi, fixons $r \in \{2, \dots, N+1\}$. Il faut que les $r-1$ premiers numéros soient distincts, puis que le tirage de rang r reproduise l'un d'eux. Cette dernière probabilité conditionnelle vaut $(r-1)/N$, d'où

$$P(T_N = r) = \frac{N!}{(N-r+1)!N^{r-1}} \frac{r-1}{N} = \frac{(r-1)N!}{(N-r+1)!N^r}.$$

La formule est valable y compris pour $r = N+1$, avec $0! = 1$. La probabilité est nulle pour toute autre valeur entière. On retrouve en particulier les résultats de 2. (b).

On peut aussi obtenir la même loi par différence

$P(T_N = r) = P(T_N > r-1) - P(T_N > r)$, en posant $P(T_N > N+1) = 0$; le calcul précédent explicite directement le mécanisme de la première répétition.

2. (d) Méthode 1 — Produit fini.

Si k est fixé, dès que $N \geq k$, la formule précédente est un produit de k facteurs. Chacun tend vers 1 quand $N \rightarrow +\infty$. Le nombre de facteurs étant fixe,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(T_N > k) = 1.$$

Pour $k = 0$, la probabilité vaut déjà 1. Le résultat couvre donc tous les entiers naturels fixés.

Méthode 2 — Majoration du risque de collision.

Notons B_j le numéro du tirage de rang j . Pour $1 \leq i < j \leq k$, l'indépendance et l'uniformité donnent

$$P(B_i = B_j) = \sum_{a=1}^N P(B_i = a, B_j = a) = N \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}.$$

Si une répétition a lieu avant le rang k , au moins l'une des égalités $B_i = B_j$ est réalisée. Il y a $1 + 2 + \dots + (k-1) = k(k-1)/2$ couples de rangs. La majoration d'une réunion donne

$$0 \leq P(T_N \leq k) \leq \frac{k(k-1)}{2N} \rightarrow 0.$$

On retrouve $P(T_N > k) \rightarrow 1$. Cette méthode fournit en plus une borne quantitative. Elle explique l'intuition du résultat : pour un nombre fixé de tirages, une urne de plus en plus grande rend les répétitions de moins en moins probables.

II. Étude d'un algorithme

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : les rangs mathématiques sont conservés dans `i`, `S` et `U`, tandis que l'accès aux tableaux tient compte de l'indexation à partir de zéro. L'affectation au booléen utilise partout le nom coincide; la graphie conicide figurant une fois dans la source est une coquille, rectifiée pour permettre la détection de la répétition.

Le programme complet est le suivant; il n'y a pas de blanc à compléter dans le sujet.

Python

```
import numpy.random as rd

def X():
    return rd.randint(1, 20001, size=20001)
```

```
T = X()
i = 1
coincide = False
while not coincide:
    i = i + 1
    S = 0
    while S < i - 1 and not coincide:
        S = S + 1
        if T[S - 1] == T[i - 1]:
            coincide = True
U = i
for n in range(i):
    print(T[n], ", ")
print()
print("U= ", U)
print("S= ", S)
```

- a)** La fonction X construit et renvoie un tableau de 20001 tirages indépendants et uniformes parmi les numéros $1, \dots, 20000$. La borne supérieure 20001 de `randint` est exclue.

Les tirages sont préparés tous ensemble ; le reste du programme ne les utilise que jusqu'à la première répétition. Ils simulent donc les tirages avec remise du problème pour $N = 20000$.

- b)** Au début de l'examen du rang i , les numéros précédents sont distincts, sinon une répétition aurait déjà arrêté la boucle extérieure. La boucle intérieure compare le numéro de rang i , stocké dans $T[i - 1]$, à ceux de rangs $S = 1, 2, \dots, i - 1$. Si une égalité est détectée, `coincide` devient vrai et les deux boucles s'arrêtent.

Ainsi U est le rang de la première répétition ; c'est une réalisation de T_{20000} . La variable S est le rang de l'apparition antérieure du numéro répété :

$$1 \leq S < U, \quad T[S - 1] = T[U - 1].$$

Ce rang antérieur est unique, car les numéros obtenus avant le rang U sont distincts. Le

programme affiche les tirages jusqu'au rang U , puis les deux rangs U et S .

- c) À chaque passage dans la boucle extérieure, i augmente de 1. Si aucune répétition n'a encore été trouvée après 20000 tirages, les 20000 numéros possibles ont tous été obtenus. Le tirage de rang 20001 est donc nécessairement égal à l'un des précédents.

La boucle extérieure effectue par conséquent au plus 20000 passages, pour les rangs 2 à 20001. Chaque boucle intérieure est elle-même finie, car S augmente de 1 jusqu'à au plus $i - 1$. La taille du tableau est suffisante : le dernier accès possible est $T[20000]$. Le programme termine pour toute suite de tirages.

Le code a été exécuté ; une simulation illustre son fonctionnement sans remplacer cette preuve de terminaison.

III. Étude du comportement asymptotique de la suite $(T_N)_{N \geq 3}$

1. (a) Méthode 1 — Sommes finies.

Notons $p_j = P(T_N = j)$ pour $2 \leq j \leq N + 1$. Puisque T_N est bornée, son espérance existe. Pour $0 \leq k \leq N$, on a

$$P(T_N > k) = \sum_{j=k+1}^{N+1} p_j,$$

en posant $p_1 = 0$. En intervertissant deux sommes finies,

$$\sum_{k=0}^N P(T_N > k) = \sum_{j=1}^{N+1} p_j \sum_{k=0}^{j-1} 1 = \sum_{j=1}^{N+1} j p_j = E(T_N).$$

Méthode 2 — Décomposition par indicatrices.

Si T_N vaut j , exactement les j événements $\{T_N > 0\}, \dots, \{T_N > j - 1\}$ sont réalisés. On a

donc l'égalité de variables aléatoires

$$T_N = \sum_{k=0}^N \mathbf{1}_{\{T_N > k\}}.$$

Chaque indicatrice est bornée et son espérance est la probabilité de l'événement correspondant. La linéarité de l'espérance pour cette somme finie fournit

$$E(T_N) = \sum_{k=0}^N P(T_N > k).$$

La première méthode compte les occurrences de chaque probabilité p_j ; la seconde exprime le temps d'attente comme le nombre de rangs qu'il dépasse.

1. (b) La formule de I.2. (c) reste vraie pour $k = 0$, puisque le produit vide vaut 1. Ainsi

$$E(T_N) = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{(N-k)!N^k}.$$

Dans cette somme finie, posons $h = N - k$. Le terme devient $\frac{N!}{N^N} \frac{N^h}{h!}$ et h parcourt les entiers de 0 à N , en sens inverse. Il vient

$$E(T_N) = \frac{N!}{N^N} \sum_{h=0}^N \frac{N^h}{h!}.$$

2. (a) Méthode 1 — Stabilité des lois de Poisson et récurrence.

Pour $N = 1$, on a $Y_1 = X_1 \sim \mathcal{P}(1)$. Supposons $Y_N \sim \mathcal{P}(N)$. Les variables $X_1, \dots, X_{N+1}$ sont mutuellement indépendantes, donc leur somme Y_N est indépendante de X_{N+1} , par le lemme des coalitions.

La somme de deux variables indépendantes de lois $\mathcal{P}(N)$ et $\mathcal{P}(1)$ suit la loi $\mathcal{P}(N + 1)$.

Comme $Y_{N+1} = Y_N + X_{N+1}$, l'hérédité est établie et

$$Y_N \sim \mathcal{P}(N) \quad (N \geq 1).$$

Méthode 2 — Calcul de la loi au pas de récurrence.

Avec la même initialisation et la même indépendance, fixons $k \in \mathbb{N}$. Les événements $\{Y_N = j, X_{N+1} = k - j\}$, pour $0 \leq j \leq k$, forment une partition de $\{Y_{N+1} = k\}$. Par indépendance,

$$P(Y_{N+1} = k) = \sum_{j=0}^k e^{-N} \frac{N^j}{j!} e^{-1} \frac{1}{(k-j)!} = \frac{e^{-(N+1)}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} N^j.$$

Le binôme donne

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} N^j = (N + 1)^k.$$

Ainsi

$$P(Y_{N+1} = k) = e^{-(N+1)} \frac{(N + 1)^k}{k!},$$

ce qui établit directement le même pas de récurrence. La première méthode reconnaît une propriété de cours ; la seconde montre comment le binôme produit ici l'addition des paramètres.

Les moments d'une loi de Poisson de paramètre N existent et valent

$$E(Y_N) = N, \quad V(Y_N) = N.$$

2. (b) Les variables X_n sont indépendantes, de même loi $\mathcal{P}(1)$, d'espérance 1 et de variance $1 > 0$. Les hypothèses du théorème limite central sont satisfaites. En notant $\bar{X}_N = Y_N/N$, il donne

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N - 1) = \frac{Y_N - N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

La fonction de répartition de Z est continue en 0. Par la définition de la convergence en loi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\frac{Y_N - N}{\sqrt{N}} \leq 0\right) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt.$$

2. (c) Comme $\sqrt{N} > 0$, les événements $\{(Y_N - N)/\sqrt{N} \leq 0\}$ et $\{Y_N \leq N\}$ sont égaux.

La densité normale centrée réduite est paire, son intégrale totale vaut 1 et sa loi n'a pas de masse au point 0. La moitié de sa masse se trouve donc à gauche de 0 :

$$P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

Par la question précédente,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(Y_N \leq N) = \frac{1}{2}.$$

3. La loi de Poisson obtenue à la question 2. (a) donne

$$P(Y_N \leq N) = e^{-N} \sum_{h=0}^N \frac{N^h}{h!}.$$

En reportant dans la formule de 1. (b), on obtient l'identité exacte

$$E(T_N) = \frac{N!e^N}{N^N} P(Y_N \leq N).$$

Le facteur $N!e^N/N^N$ est strictement positif. Par la question 2. (c),

$$\frac{E(T_N)}{\frac{1}{2} \frac{N!e^N}{N^N}} = 2P(Y_N \leq N) \rightarrow 1.$$

Il en résulte

$$E(T_N) \sim \frac{1}{2} \frac{N!e^N}{N^N}.$$

4. (a) Pour tout entier $j \geq 1$, on a l'identité télescopique

$$j^2 = \sum_{k=0}^{j-1} ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^{j-1} (2k+1).$$

En posant comme précédemment $p_j = P(T_N = j)$, puis en intervertissant seulement des sommes finies, il vient

$$E(T_N^2) = \sum_{j=1}^{N+1} p_j \sum_{k=0}^{j-1} (2k+1) = \sum_{k=0}^N (2k+1) \sum_{j=k+1}^{N+1} p_j.$$

La somme intérieure vaut $P(T_N > k)$; ainsi

$$E(T_N^2) = \sum_{k=0}^N (2k+1) P(T_N > k).$$

4. (b) La formule de I.2. (c), également valable pour $k = 0$, donne

$$\sum_{k=0}^N k P(T_N > k) = \sum_{k=0}^N k \frac{N!}{(N-k)! N^k}.$$

En posant $h = N - k$, on a $k = N - h$ et $N^{-k} = N^h / N^N$. On obtient exactement

$$\sum_{k=0}^N k P(T_N > k) = \frac{N!}{N^N} \sum_{h=0}^N (N-h) \frac{N^h}{h!}.$$

4. (c) Séparons les deux termes du facteur $N - h$. Le terme contenant h est nul pour

$h = 0$, d'où

$$\sum_{h=0}^N (N-h) \frac{N^h}{h!} = N \sum_{h=0}^N \frac{N^h}{h!} - \sum_{h=1}^N \frac{N^h}{(h-1)!}.$$

En posant $j = h - 1$ dans la dernière somme,

$$\sum_{h=1}^N \frac{N^h}{(h-1)!} = N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N^j}{j!}.$$

Tous les termes d'indices de 0 à $N - 1$ s'annulent entre les deux sommes. Il reste uniquement

$$\sum_{h=0}^N (N-h) \frac{N^h}{h!} = N \frac{N^N}{N!} = \frac{N^{N+1}}{N!}.$$

4. (d) En combinant 4. (b) et 4. (c),

$$\sum_{k=0}^N k P(T_N > k) = \frac{N!}{N^N} \frac{N^{N+1}}{N!} = N.$$

La question 4. (a) et la question 1. (a) donnent alors

$$E(T_N^2) = 2 \sum_{k=0}^N k P(T_N > k) + \sum_{k=0}^N P(T_N > k) = 2N + E(T_N).$$

La formule de Koenig-Huygens est applicable, puisque T_N est bornée. On conclut

$$V(T_N) = E(T_N^2) - (E(T_N))^2 = 2N + E(T_N) - (E(T_N))^2.$$

Pour $N = 3$, cette identité redonne $6 + 26/9 - (26/9)^2 = 44/81$, en accord avec le calcul direct de I.1.

5. Question adaptée au programme actuel. Résultat admis dans cette version adaptée :
pour la variable T_N définie dans cet exercice,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(T_N)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Cette admission concerne seulement l'espérance du temps de première répétition étudié ici. Elle permet de conclure sur la variance à partir de l'identité exacte de 4. (d), sans employer de formule asymptotique générale pour les factorielles.

La limite admise est strictement positive ; elle signifie que

$$E(T_N) \sim \sqrt{\frac{\pi N}{2}}.$$

Pour la variance, divisons l'identité de 4. (d) par N avant de passer à la limite :

$$\frac{V(T_N)}{N} = 2 + \frac{E(T_N)}{N} - \left(\frac{E(T_N)}{\sqrt{N}} \right)^2.$$

On a $E(T_N)/N = (E(T_N)/\sqrt{N})/\sqrt{N} \rightarrow 0$ et $(E(T_N)/\sqrt{N})^2 \rightarrow \pi/2$. Par conséquent,

$$\frac{V(T_N)}{N} \rightarrow 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4 - \pi}{2} > 0.$$

La positivité de cette limite, avec $\pi < 4$, autorise la conclusion en termes d'équivalent :

$$V(T_N) \sim \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) N.$$

Ce passage par un quotient justifie les soustractions : on ne soustrait pas des équivalents sans contrôle.

Relevé des adaptations

- Exercice 2, préambule : uniformité et indépendance des tirages explicitées ; elles sont nécessaires à la loi de T_N et au programme de simulation.

- Exercice 2, II, questions a), b), c) : Code adapté en Python. La fonction X renvoie le tableau ; les rangs sont conservés dans i, S, U , avec accès aux éléments par indice diminué de 1. La boucle extérieure est une boucle `while`. La coquille conicide est rectifiée en `coincide`. Les questions sur la fonction et la boucle sont reformulées en conséquence ; les sorties mathématiques sont préservées.
- Exercice 2, III.1. (a), III.2. (b), III.2. (c) : indices de variables harmonisés en N pour correspondre à la limite et à la suite Y_N définie dans le préambule de III.2.
- Exercice 2, III.5 : la formule asymptotique générale des factorielles est remplacée par l'admission de sa seule conséquence particulière nécessaire ici,
 $E(T_N)/\sqrt{N} \rightarrow \sqrt{\pi/2}$. L'équivalent de l'espérance est reformulé et celui de la variance reste entièrement démontré à l'aide de III.4. (d).