



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1998

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE I

1. (a) Soit μ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_3 + \mu x_4 = 0, \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 .

i. Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2) \quad \begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + \mu x_4 = 0, \\ (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0, \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 = 0. \end{cases}$$

ii. Résoudre, en discutant suivant les valeurs de μ , le système

$$\begin{cases} (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0, \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 = 0. \end{cases}$$

iii. Déterminer enfin, suivant les valeurs de μ , les solutions du système (1).

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et, à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe la fonction polynôme $T_n P$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T_n P(x) = (nx + 1)P(x) + (1 - x^2)P'(x).$$

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'application $P \mapsto T_n P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(b) Donner la matrice M_n de cet endomorphisme T_n dans la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée des fonctions polynômes $1, X, \dots, X^n$, où X^k désigne, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la fonction $x \mapsto x^k$.

(c) Dans le cas $n = 3$, donner les valeurs propres de T_3 et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.

(d) En faisant la somme des lignes de la matrice M_n , déterminer simplement une valeur propre de T_n .

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de T_n .

(a) Étant donné un réel λ , calculer, pour $-1 < x < 1$, l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} dt.$$

On cherchera d'abord deux réels a et b tels que

$$\frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t}.$$

(b) Montrer que si les nombres $h = n + 1 - \lambda$ et $k = n - 1 + \lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction $\exp(-g_\lambda(x))$ est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que $-(n - 1) \leq \lambda \leq n + 1$.

(c) Pour $n = 3$, quels sont les réels λ qui vérifient les conditions précédentes ? Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, combien de réels λ vérifient ces conditions ?

(d) Montrer que si λ est une valeur propre de T_n et si P_λ est un vecteur propre associé, alors la fonction h , définie sur $] -1, 1[$ par $h(x) = P_\lambda(x) \exp(g_\lambda(x))$, a une dérivée nulle. Que vaut alors P_λ ?

(e) Déterminer les valeurs propres de T_n et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p , où $0 < p < 1$, et pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est-à-dire lors de deux lancers consécutifs.

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P , modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note U_n l'événement : « on obtient deux faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n + 1$ », et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

- A_n l'événement : « les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n -ième lancer donne face » ;

- B_n l'événement : « les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n -ième lancer donne pile ».

On pose $x_n = P(A_n)$ et $y_n = P(B_n)$.

1. (a) Déterminer $u_1; x_2, y_2, u_2; x_3, y_3, u_3$.

(b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n .

(c) Pour tout $n \geq 2$, déterminer les probabilités conditionnelles

$$P(A_{n+1} | A_n), \quad P(A_{n+1} | B_n), \quad P(B_{n+1} | A_n), \quad P(B_{n+1} | B_n).$$

(d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = py_n, \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n). \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}$.

(a) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 0, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

(b) On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$,

$$f_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

(c) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n , puis de u_n , en fonction de n , α et β .

(d) Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1,$$

c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \frac{2}{3}$. Donner, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n .