



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1998

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE I

1. (a) i. On élimine x_2 et x_3 à l'aide de la première et de la dernière équation. Celles-ci donnent exactement $x_2 = -\mu x_1$ et $x_3 = -\mu x_4$.

En les substituant dans les deux équations centrales, on obtient respectivement

$$3x_1 - \mu^2 x_1 - 2\mu x_4 = 0, \quad -2\mu x_1 - \mu^2 x_4 + 3x_4 = 0.$$

Ce sont les deux dernières équations de (2). Réciproquement, si les quatre équations de (2) sont satisfaites, les substitutions inverses redonnent les quatre équations de (1).

Aucune division n'a été effectuée : l'équivalence vaut pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

- ii. On ajoute et on retranche les deux équations. Ces opérations sont réversibles, car les équations initiales se retrouvent en divisant la somme et la différence par 2. Le système équivaut donc à

$$\begin{cases} (3 - \mu^2 - 2\mu)(x_1 + x_4) = 0, \\ (3 - \mu^2 + 2\mu)(x_1 - x_4) = 0. \end{cases}$$

Or

$$3 - \mu^2 - 2\mu = -(\mu - 1)(\mu + 3), \quad 3 - \mu^2 + 2\mu = -(\mu - 3)(\mu + 1).$$

Les ensembles de racines de ces deux facteurs sont disjoints. Il en résulte les trois cas suivants.

- Si $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$, les deux facteurs sont non nuls : $x_1 + x_4 = x_1 - x_4 = 0$, donc $x_1 = x_4 = 0$.
- Si $\mu \in \{-3, 1\}$, le premier facteur est nul et le second ne l'est pas : $x_1 = x_4$, avec une valeur commune arbitraire.

- Si $\mu \in \{-1, 3\}$, le second facteur est nul et le premier ne l'est pas : $x_4 = -x_1$, avec x_1 arbitraire.

Cette résolution utilise seulement des combinaisons d'équations et des factorisations réelles.

iii. On réintroduit les égalités $x_2 = -\mu x_1$ et $x_3 = -\mu x_4$ établies en i.

Si $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$, la seule solution est $(0, 0, 0, 0)$.

Si $\mu \in \{-3, 1\}$, les solutions sont

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1, -\mu, -\mu, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $\mu \in \{-1, 3\}$, les solutions sont

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1, -\mu, \mu, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Chaque famille est obtenue à partir d'un système équivalent : toutes les solutions sont ainsi décrites.

(b) Pour un réel λ et une colonne $V = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$, l'égalité $AV = \lambda V$ est exactement le système (1) avec $\mu = 1 - \lambda$.

Une valeur propre correspond à l'existence d'une solution non nulle. D'après iii, cela équivaut à $1 - \lambda \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Les valeurs propres sont donc $-2, 0, 2, 4$ et leurs espaces propres sont

$$E_{-2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_4 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Les vecteurs propres sont les multiples non nuls des colonnes indiquées. Ces quatre colonnes sont associées à des valeurs propres distinctes : elles forment une famille libre de quatre vecteurs, donc une base de $\mathbb{R}^4$.

2. (a) La dérivation et la multiplication par une fonction fixée sont linéaires. Ainsi, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$T_n(aP + bQ) = aT_nP + bT_nQ.$$

Il reste à contrôler le degré : les termes de degré $n + 1$ doivent se compenser. Pour $j \in \{0, \dots, n\}$, le calcul direct donne

$$T_n(X^j) = (n - j)X^{j+1} + X^j + jX^{j-1},$$

où le dernier terme est absent pour $j = 0$. Pour $j = n$, le coefficient du terme X^{n+1} est nul. Toutes les images des éléments de la base canonique appartiennent donc à $\mathbb{R}_n[x]$. Par linéarité, il en est de même pour l'image de tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

L'application T_n est ainsi un endomorphisme de cet espace concret de dimension $n + 1$.

- (b) Les colonnes de M_n sont les coordonnées des images de $1, X, \dots, X^n$. En indexant lignes et colonnes de 0 à n , la formule précédente donne

$$(M_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ j & \text{si } i = j - 1, \\ n - j & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, les seuls termes non nuls sont sur la diagonale et ses deux diagonales voisines : la diagonale principale vaut 1, celle juste au-dessus vaut successivement $1, 2, \dots, n$, et celle juste au-dessous vaut $n, n-1, \dots, 1$.

Cette description vaut aussi pour $n = 1$, pour lequel $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Pour $n = 3$, on obtient

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Le passage des coordonnées au polynôme est un isomorphisme qui associe ${}^t(a_0, a_1, a_2, a_3)$ à $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Les résultats de 1.(b) donnent donc les valeurs propres $-2, 0, 2, 4$ et la base de polynômes propres suivante, dans cet ordre :

$$P_{-2} = 1 - 3X + 3X^2 - X^3 = (1 - X)^3,$$

$$P_0 = 1 - X - X^2 + X^3 = (1 - X)^2(1 + X),$$

$$P_2 = 1 + X - X^2 - X^3 = (1 - X)(1 + X)^2,$$

$$P_4 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3 = (1 + X)^3.$$

Leurs colonnes de coordonnées formant une base, ces quatre polynômes forment bien une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(d) Dans la colonne j de M_n , la somme des coefficients vaut

$$j + 1 + (n - j) = n + 1,$$

en omettant, aux extrémités, les termes nuls correspondant à des lignes absentes. La somme des lignes de M_n est donc la ligne $(n + 1)(1, \dots, 1)$.

Posons $S = (1, \dots, 1)$ et $K = M_n - (n + 1)I_{n+1}$. On a $SK = 0$. Si K était inversible, on pourrait multiplier cette égalité par K^{-1} à droite, ce qui donnerait $S = 0$, contradiction. La matrice K n'est donc pas inversible.

Comme elle est carrée, son noyau contient une colonne non nulle V , et $M_n V = (n + 1)V$. Ainsi $n + 1$ est une valeur propre de M_n , donc de T_n . On n'a pas confondu une ligne et une colonne propre : l'argument d'inversibilité justifie le passage à une colonne propre.

3. (a) Sur $] -1, 1[$, les dénominateurs $1 - t$ et $1 + t$ sont strictement positifs. L'identité demandée équivaut à

$$nt + 1 - \lambda = a(1 + t) + b(1 - t) = (a - b)t + a + b.$$

On choisit donc

$$a = \frac{n + 1 - \lambda}{2}, \quad b = \frac{1 - \lambda - n}{2}.$$

En utilisant les primitives logarithmiques sur cet intervalle, avec des logarithmes nuls à $t = 0$, il vient

$$g_\lambda(x) = -\frac{n + 1 - \lambda}{2} \ln(1 - x) + \frac{1 - \lambda - n}{2} \ln(1 + x).$$

Avec les notations $h = n + 1 - \lambda$ et $k = n - 1 + \lambda$, cela s'écrit

$$g_\lambda(x) = -\frac{h}{2} \ln(1 - x) - \frac{k}{2} \ln(1 + x).$$

La formule vaut pour tout $x \in] -1, 1[$, y compris $x < 0$, car les mêmes primitives s'appliquent à une intégrale orientée de 0 à x .

(b) La formule obtenue en (a) donne, pour $-1 < x < 1$,

$$\exp(-g_\lambda(x)) = (1-x)^{h/2}(1+x)^{k/2}.$$

Si h et k sont des entiers pairs positifs ou nuls, les deux exposants sont des entiers naturels. Le membre de droite est donc un polynôme, dont la fonction considérée est la restriction à $] -1, 1[$. Son degré est $h/2 + k/2 = n$.

Enfin, $h \geq 0$ impose $\lambda \leq n+1$, tandis que $k \geq 0$ impose $\lambda \geq 1-n = -(n-1)$.

L'encadrement annoncé est établi.

(c) Écrivons $h = 2j$. Les conditions de (b) équivalent à

$$j \in \{0, \dots, n\}, \quad \lambda = n+1-2j, \quad k = 2(n-j).$$

Pour $n = 3$, cela donne successivement 4, 2, 0, -2. Pour $n \geq 1$ quelconque, les valeurs $n+1-2j$ sont distinctes lorsque j parcourt les entiers de 0 à n . Il y a donc exactement $n+1$ réels répondant aux conditions.

(d) L'égalité $T_n P_\lambda = \lambda P_\lambda$ signifie que

$$(1-x^2)P'_\lambda(x) + (nx+1-\lambda)P_\lambda(x) = 0.$$

Sur $] -1, 1[$, la fonction g_λ est dérivable et

$$g'_\lambda(x) = \frac{nx+1-\lambda}{1-x^2}.$$

La règle de dérivation d'un produit et d'une composée donne alors

$$h'(x) = \exp(g_\lambda(x)) \left(P'_\lambda(x) + \frac{nx+1-\lambda}{1-x^2} P_\lambda(x) \right) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.

Comme $g_\lambda(0) = 0$, sa valeur constante est $h(0) = P_\lambda(0)$. Par conséquent,

$$P_\lambda(x) = P_\lambda(0) \exp(-g_\lambda(x)) = P_\lambda(0)(1-x)^{(n+1-\lambda)/2}(1+x)^{(n-1+\lambda)/2}, \quad -1 < x < 1.$$

De plus, $P_\lambda(0) \neq 0$: sinon le polynôme P_λ s'annulerait en tous les points de $] -1, 1[$, donc serait nul, ce qui est impossible pour un vecteur propre.

Cette expression sur l'intervalle détermine entièrement le polynôme : deux polynômes qui y coïncident ont une infinité de racines pour leur différence et sont donc égaux.

(e) Pour $j \in \{0, \dots, n\}$, posons

$$\lambda_j = n + 1 - 2j, \quad P_j = (1 - X)^j(1 + X)^{n-j}.$$

Le polynôme P_j est non nul et de degré n . D'après (a) et (b), il coïncide sur $] -1, 1[$ avec $\exp(-g_{\lambda_j})$. En dérivant cette égalité sur cet intervalle, on obtient

$$(1 - x^2)P'_j(x) + (nx + 1 - \lambda_j)P_j(x) = 0.$$

Ainsi $T_n P_j - \lambda_j P_j$ est un polynôme nul sur tout $] -1, 1[$; il est donc identiquement nul sur $\mathbb{R}$. Le polynôme P_j est bien un vecteur propre de valeur propre λ_j .

Les $n + 1$ réels λ_j sont distincts. Les $n + 1$ vecteurs propres correspondants sont donc libres, puis forment une base de l'espace de dimension $n + 1$. Dans cette base, la matrice de T_n est diagonale de diagonale $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Il n'y a pas d'autre valeur propre : pour un vecteur propre exprimé dans cette base, au moins une coordonnée est non nulle et impose l'égalité de sa valeur propre avec l'un des λ_j .

Finalement,

$$\text{Sp}(T_n) = \{n + 1 - 2j \mid j \in \{0, \dots, n\}\} = \{1 - n, 3 - n, \dots, n + 1\},$$

et $((1 - X)^j(1 + X)^{n-j})_{0 \leq j \leq n}$ est une base de vecteurs propres. L'expression de (d) montre aussi que chaque espace propre est la droite engendrée par le polynôme correspondant.

Pour préciser la parité : si $n = 2m$, les valeurs propres sont les entiers impairs

$1 - 2m, 3 - 2m, \dots, 2m + 1$; si $n = 2m + 1$, ce sont les entiers pairs

$-2m, -2m + 2, \dots, 2m + 2$.

EXERCICE II

On note F_k l'événement «le lancer numéro k donne face» et P_k l'événement «le lancer numéro k donne pile». Les résultats des lancers sont mutuellement indépendants, avec $P(F_k) = p$ et $P(P_k) = q$, où $p, q > 0$.

1. (a) Deux faces dès les deux premiers lancers donnent $U_1 = F_1 \cap F_2$, donc $u_1 = p^2$.

Pour A_2 , la seule succession possible est pile-face, d'où $x_2 = qp$. Pour B_2 , les successions possibles sont face-pile et pile-pile ; elles sont disjointes et ont pour probabilités pq et q^2 , donc $y_2 = pq + q^2 = q$.

L'événement U_2 est la succession pile-face-face : $u_2 = qp^2$.

Pour A_3 , les successions possibles sont face-pile-face et pile-pile-face. Ainsi

$$x_3 = p^2q + pq^2 = pq.$$

Pour B_3 , les successions possibles sont face-pile-pile, pile-face-pile et pile-pile-pile. Ainsi

$$y_3 = pq^2 + pq^2 + q^3 = q^2(2p + q) = q^2(1 + p).$$

Enfin, U_3 est la réunion disjointe des successions face-pile-face-face et pile-pile-face-face. Donc

$$u_3 = p^3q + p^2q^2 = p^2q.$$

Toutes ces probabilités utilisent l'indépendance des lancers et l'additivité pour des successions incompatibles.

(b) Pour $n \geq 2$, une première paire de faces aux rangs $n, n + 1$ signifie exactement qu'il n'y en a aucune parmi les n premiers lancers, que le lancer n donne face et que le suivant donne encore face. Ainsi

$$U_n = A_n \cap F_{n+1}.$$

L'événement A_n dépend uniquement des n premiers lancers ; il est donc indépendant de F_{n+1} . Par conséquent,

$$u_n = px_n, \quad n \geq 2.$$

- (c) Les probabilités conditionnelles sont bien définies. En effet, la succession de $n - 1$ piles suivies d'une face appartient à A_n et a pour probabilité $q^{n-1}p > 0$; la succession de n piles appartient à B_n et a pour probabilité $q^n > 0$.

Si A_n est réalisé, le dernier lancer est face. Une face supplémentaire créerait une paire et ne permettrait donc pas A_{n+1} . En revanche, une pile supplémentaire donne B_{n+1} . D'où

$$P(A_{n+1} | A_n) = 0, \quad P(B_{n+1} | A_n) = q.$$

Si B_n est réalisé, le dernier lancer est pile. Une face supplémentaire donne A_{n+1} et une pile supplémentaire donne B_{n+1} . Par indépendance du lancer suivant avec les précédents,

$$P(A_{n+1} | B_n) = p, \quad P(B_{n+1} | B_n) = q.$$

- (d) Les événements A_n et B_n sont disjoints, mais leur réunion n'est pas tout l'univers. On peut néanmoins les utiliser ici car une trajectoire qui a déjà rencontré deux faces successives ne peut plus appartenir à A_{n+1} ou à B_{n+1} .

Plus précisément, on a les égalités d'événements

$$A_{n+1} = B_n \cap F_{n+1},$$

$$B_{n+1} = (A_n \cap P_{n+1}) \cup (B_n \cap P_{n+1}),$$

où les deux événements de la seconde réunion sont incompatibles. L'indépendance du lancer $n + 1$ donne donc

$$x_{n+1} = py_n, \quad y_{n+1} = q(x_n + y_n), \quad n \geq 2.$$

2. (a) La suite est indexée à partir de 0, comme l'exige la donnée $f_0 = 1$; l'indice initial 1 figurant dans la présentation de la suite dans le PDF est une coquille rectifiée dans le sujet.

Ici $p = q = \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 2$, les relations précédentes donnent

$$y_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + y_{n+1}) = \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}y_{n+1}.$$

Posons $z_n = 2^n y_n$ pour $n \geq 2$. En multipliant l'égalité par 2^{n+2} , on obtient

$$z_{n+2} = z_{n+1} + z_n.$$

D'après 1.(a), $y_2 = \frac{1}{2}$ et $y_3 = \frac{3}{8}$. Ainsi $z_2 = 2 = f_2$ et $z_3 = 3 = f_3$. Les deux suites satisfont la même récurrence et ont les mêmes deux termes initiaux aux indices 2 et 3. Par récurrence, elles coïncident à tous les indices $n \geq 2$:

$$y_n = \frac{f_n}{2^n}.$$

(b) La récurrence est linéaire d'ordre deux à racines caractéristiques réelles. L'équation $r^2 - r - 1 = 0$ a pour racines distinctes α et β , avec

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1, \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}.$$

La forme générale est $f_n = C\alpha^n + D\beta^n$. Les conditions $f_0 = f_1 = 1$ donnent $C + D = 1$ et $C\alpha + D\beta = 1$. Comme $\alpha \neq \beta$,

$$C = \frac{1 - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad D = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta} = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}.$$

On conclut que

$$f_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, \quad n \geq 0.$$

(c) Pour $n \geq 3$, les égalités $x_n = \frac{1}{2}y_{n-1}$ et $y_{n-1} = f_{n-1}/2^{n-1}$ donnent

$$x_n = \frac{f_{n-1}}{2^n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)2^n}.$$

Cette formule vaut aussi pour $n = 2$: son membre de droite est $f_1/4 = 1/4 = x_2$. Pour tout $n \geq 2$, on en déduit par 1.(b)

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)2^{n+1}}.$$

La dernière expression vaut encore pour $n = 1$, car elle donne $1/4 = u_1$. Cette extension sera utile pour sommer la série.

(d) Méthode 1 — Somme de séries géométriques.

On a $|\alpha/2| < 1$ puisque $1 < \alpha < 2$, et $|\beta/2| < 1$ puisque $-1 < \beta < 0$. Les deux séries géométriques suivantes convergent absolument, ce qui justifie leur soustraction. D'après (c),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \left(\frac{\alpha/2}{1 - \alpha/2} - \frac{\beta/2}{1 - \beta/2} \right).$$

La différence dans les parenthèses vaut

$$\frac{(\alpha - \beta)/2}{(1 - \alpha/2)(1 - \beta/2)}.$$

Or

$$(1 - \alpha/2)(1 - \beta/2) = 1 - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.$$

Les événements U_n sont deux à deux incompatibles, puisqu'une première paire a un rang unique. Leur réunion est l'événement « obtenir au moins une paire de faces en un nombre fini de lancers ». Par additivité dénombrable, la probabilité de cet événement est bien la somme calculée, donc 1.

Méthode 2 — Encadrement par des blocs indépendants.

Cette méthode explique directement pourquoi une paire finit par apparaître, sans utiliser la formule de u_n . Pour $m \geq 1$, soit D_m l'événement « aucune paire de faces ne se présente pendant les $2m$ premiers lancers ». Les événements $U_1, \dots, U_{2m-1}$ et D_m

forment une partition de l'univers :

$$1 - \sum_{n=1}^{2m-1} u_n = P(D_m).$$

Si D_m est réalisé, aucun des m blocs disjoints de deux lancers, de rangs $(1, 2), (3, 4), \dots, (2m-1, 2m)$, n'est formé de deux faces. Ces blocs sont indépendants et la probabilité qu'un bloc ne soit pas face-face vaut $1 - p^2 = 3/4$. Par inclusion et indépendance,

$$0 \leq 1 - \sum_{n=1}^{2m-1} u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^m.$$

Le membre de droite tend vers 0. Les sommes partielles d'indices impairs tendent donc vers 1 ; les autres sommes partielles sont comprises entre deux d'entre elles, puisque les u_n sont positifs. La série a ainsi pour somme 1.

La première méthode exploite une formule explicite pour calculer une somme ; la seconde repose sur l'indépendance et reste applicable sans avoir résolu la récurrence.

3. On revient aux relations de 1, avec maintenant $p = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{1}{3}$. Pour $n \geq 2$, on a $u_n = px_n$ et $u_{n+1} = p^2y_n$. Ainsi

$$u_{n+2} = p^2y_{n+1} = p^2q(x_n + y_n) = pq u_n + q u_{n+1}.$$

Cette récurrence vaut également pour $n = 1$: les valeurs de 1.(a) donnent $u_1 = p^2$, $u_2 = qp^2$, $u_3 = qp^2$ et

$$q u_2 + pq u_1 = q^2p^2 + p^3q = p^2q(q + p) = p^2q = u_3.$$

Par conséquent,

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n, \quad n \geq 1, \quad u_1 = \frac{4}{9}, \quad u_2 = \frac{4}{27}.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence est $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$, soit

$(r - \frac{2}{3})(r + \frac{1}{3}) = 0$. Ses deux racines sont réelles et distinctes. On peut donc écrire

$$u_n = C \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + D \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Les conditions initiales imposent

$$C + D = \frac{4}{9}, \quad \frac{2}{3}C - \frac{1}{3}D = \frac{4}{27}.$$

En multipliant la seconde équation par 3 puis en l'ajoutant à la première, on obtient $3C = 8/9$, donc $C = 8/27$ et $D = 4/27$. Finalement,

$$u_n = \frac{8}{27} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{4}{27} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{9} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right], \quad n \geq 1.$$

Cette expression donne des termes positifs : pour n impair, les deux contributions dans les crochets s'ajoutent ; pour n pair, la première est strictement plus grande que la seconde. Les valeurs initiales et la récurrence sont satisfaites, ce qui établit la formule pour tous les indices demandés.

Relevé des adaptations

II.2.(a) : l'indexation de la suite (f_n) commence à 0, conformément à la donnée $f_0 = 1$, au lieu de l'indice initial 1 annoncé dans le PDF. Cette rectification ne change ni la récurrence ni les questions suivantes.