



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1997

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice I

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que -1 est une valeur propre de A et trouver un vecteur propre, noté V , associé à cette valeur propre.
1. (b) Montrer que (V, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette base.
1. (c) Montrer que, si X est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, alors $f(X)$ est une combinaison linéaire de X et de V . En déduire que, dans toute base de $\mathbb{R}^3$ de la forme (V, V_2, V_3) , où V_2 et V_3 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où a et b sont des réels.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Plus généralement, soit U_1 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant la propriété suivante :

(P) : pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, $h(X)$ est une combinaison linéaire de X et de U_1 .

Soit (U_1, U_2, U_3) une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en adjoignant à U_1 deux autres vecteurs U_2 et U_3 .

3. (a) En appliquant la propriété (P) à trois vecteurs particuliers, montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que

$$h(U_2) = \alpha U_1 + \gamma U_2 \quad \text{et} \quad h(U_3) = \beta U_1 + \gamma U_3.$$

3. (b) En déduire que la matrice de h dans la base (U_1, U_2, U_3) est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

où α, β, γ et λ sont des réels.

3. (c) L'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

Exercice II

1. Montrer que, si g est une fonction réelle définie sur $[0, 1]$, continue et positive sur cet intervalle, la fonction h , définie par

$$h(x) = 2 \int_0^x \sqrt{g(t)} dt,$$

est aussi une fonction continue et positive sur $[0, 1]$. Le mot «positive» signifie ici «positive ou nulle».

2. Compte tenu du résultat précédent, on définit sur $[0, 1]$ une suite de fonctions réelles $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f_0(x) = 1, \quad \text{et pour tout } n \geq 1, \quad f_n(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_{n-1}(t)} dt.$$

Calculer f_1 , f_2 et f_3 .

3. Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [0, 1]$, on ait $f_n(x) = a_n x^{b_n}$. Pour cette écriture, la fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1, y compris en 0.

On calculera b_n en fonction de n et on écrira une relation de récurrence donnant a_n en fonction de a_{n-1} .

4. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$2^n \ln(a_n) = - \sum_{k=1}^n 2^k \ln(1 - 2^{-k}).$$

5. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a

$$0 \leq -\ln(1-x) - x \leq \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x}.$$

5. (b) En déduire que, pour tout $k \geq 1$,

$$|-2^k \ln(1 - 2^{-k}) - 1| \leq 2^{-k}.$$

5. (c) Montrer que $\ln(a_n)$ est équivalent à $\frac{n}{2^n}$ quand n tend vers l'infini.

6. Montrer que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite en fonction de x .

Exercice III

Un pion est déplacé de manière aléatoire sur un damier de quatre cases numérotées de 1 à 4. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, représentant la position du pion aux instants successifs : pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $X_n = i$ si le pion est sur la case i à l'instant n .

Le déplacement est une chaîne de Markov homogène : à chaque instant, la loi de la position suivante dépend seulement de la position présente, selon les règles de transition ci-dessous, et ne dépend pas des positions antérieures. On note π_{ij} l'élément situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne de la matrice de transition

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, depuis la case i , la probabilité du prochain déplacement vers la case j est π_{ij} . En particulier, pour tout $n \geq 0$ tel que $P(X_n = i) > 0$,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \pi_{ij}.$$

On note, pour tout $n \geq 0$,

$$p_n = P(X_n = 1), \quad q_n = P(X_n = 2), \quad r_n = P(X_n = 3), \quad s_n = P(X_n = 4).$$

Enfin, on suppose que le pion est sur la case 1 à l'instant $n = 0$, et donc que $p_0 = 1$. Si le pion vient sur la case 4 à un instant, il y reste à l'instant suivant, d'où la quatrième ligne de la matrice Π .

1. Calculer p_1, q_1, r_1, s_1 et p_2, q_2, r_2, s_2 .
2. (a) Donner, pour tout entier $n \geq 0$, l'expression de $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1}$ en fonction de p_n, q_n, r_n, s_n .
2. (b) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions de p_n, q_n, r_n et s_n en fonction de n .

3. (a) Calculer, pour $n \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = 4 \mid X_n \neq 4)$.
3. (b) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la probabilité que le pion passe par la case 4, pour la première fois, à l'instant n . On notera t_n cette probabilité.
3. (c) Déterminer la probabilité qu'il ne passe jamais par la case 4.
3. (d) Soit T une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$, $P(T = n) = t_n$.

Calculer l'espérance et la variance de T .

4. Calculer la probabilité que le pion ne passe jamais ni par la case 2 ni par la case 3.
5. (a) Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant $n = 1$, sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant $n = 2$.
5. (b) Plus généralement, soit m et n deux entiers vérifiant $0 < m < n$. Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant m , sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant n .