



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1997

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice I

1. (a) On cherche un vecteur non nul V vérifiant $AV = -V$. En écrivant $V = (x, y, z)$, cette égalité équivaut à

$$5x - 5y + 5z = 0, \quad 3x - 3y + 5z = 0, \quad 2z = 0.$$

La dernière équation impose $z = 0$, puis les deux premières donnent $x = y$. Le choix

$$V = (1, 1, 0)$$

convient : $AV = (-1, -1, 0) = -V$. Ainsi, -1 est une valeur propre de A et son sous-espace propre est $\text{Vect}(V)$.

1. (b) La famille (V, e_2, e_3) est libre : si $aV + be_2 + ce_3 = 0$, l'égalité des coordonnées donne successivement $a = 0, b = 0, c = 0$. Elle comporte trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base.

On connaît $f(V) = -V$. Les deuxième et troisième colonnes de A donnent

$$f(e_2) = (-5, -4, 0) = -5V + e_2, \quad f(e_3) = (5, 5, 1) = 5V + e_3.$$

En plaçant ces coordonnées en colonnes, on obtient

$$\text{Mat}_{(V, e_2, e_3)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (c) Pour $X = (x, y, z)$, le calcul direct donne

$$f(X) = (4x - 5y + 5z, 3x - 4y + 5z, z) = X + (3x - 5y + 5z)V.$$

C'est bien une combinaison linéaire de X et de V .

Dans une base (V, V_2, V_3) , on a toujours $f(V) = -V$. L'identité précédente appliquée à V_2 et V_3 fournit des réels a et b tels que

$$f(V_2) = aV + V_2, \quad f(V_3) = bV + V_3.$$

La matrice cherchée est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On construit une base de vecteurs propres. La formule de la question précédente montre que

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \iff 3x - 5y + 5z = 0.$$

En posant $W_2 = (5, 3, 0)$ et $W_3 = (0, 1, 1)$, les solutions s'écrivent

$$(x, y, z) = \frac{x}{5}W_2 + zW_3,$$

car la relation impose $y = \frac{3x}{5} + z$. Ainsi, $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Vect}(W_2, W_3)$ et ces deux vecteurs sont libres.

Vérifions directement que (V, W_2, W_3) est une base. Si $aV + bW_2 + cW_3 = 0$, la troisième coordonnée donne $c = 0$, puis les deux premières donnent $a + 5b = 0$ et $a + 3b = 0$. Donc $b = 0$ puis $a = 0$.

La matrice de f dans cette base est $\text{diag}(-1, 1, 1)$. L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

3. (a) Appliquons (P) à U_2 et U_3 . Il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$ tels que

$$h(U_2) = \alpha U_1 + \gamma_2 U_2, \quad h(U_3) = \beta U_1 + \gamma_3 U_3.$$

Appliquons maintenant (P) à $U_2 + U_3$. Il existe des réels a et c vérifiant

$$h(U_2 + U_3) = aU_1 + c(U_2 + U_3).$$

Par linéarité, le membre de gauche vaut aussi

$$(\alpha + \beta)U_1 + \gamma_2 U_2 + \gamma_3 U_3.$$

L'unicité des coordonnées dans la base (U_1, U_2, U_3) donne $\gamma_2 = c = \gamma_3$. En notant cette valeur γ , on obtient les deux égalités demandées. Les trois vecteurs particuliers utilisés sont donc U_2 , U_3 et $U_2 + U_3$.

3. (b) La propriété (P) appliquée à U_1 donne $h(U_1) \in \text{Vect}(U_1)$, donc $h(U_1) = \lambda U_1$ pour un réel λ .

Les images des trois vecteurs de base sont maintenant connues. Leur écriture en colonnes donne

$$H = \text{Mat}_{(U_1, U_2, U_3)}(h) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

3. (c) La réponse dépend des paramètres. On raisonne sur la matrice concrète H .

Si $\lambda \neq \gamma$, on pose

$$W_2 = U_2 + \frac{\alpha}{\gamma - \lambda} U_1, \quad W_3 = U_3 + \frac{\beta}{\gamma - \lambda} U_1.$$

On vérifie, pour le premier de ces vecteurs,

$$h(W_2) = \gamma U_2 + \left(\alpha + \frac{\alpha \lambda}{\gamma - \lambda} \right) U_1 = \gamma W_2.$$

De même, $h(W_3) = \gamma W_3$, tandis que $h(U_1) = \lambda U_1$. La famille (U_1, W_2, W_3) est une base : dans une relation linéaire entre ces vecteurs, les coefficients de U_2 puis de U_3 s'annulent, puis celui de U_1 . Ainsi, h est diagonalisable et sa matrice dans cette base vaut $\text{diag}(\lambda, \gamma, \gamma)$.

Si $\lambda = \gamma$ et $\alpha = \beta = 0$, alors $H = \gamma I_3$: h est diagonalisable.

Enfin, supposons $\lambda = \gamma$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Pour un vecteur propre $X = xU_1 + yU_2 + zU_3$

associé à une valeur propre μ , les deuxième et troisième coordonnées imposent

$$(\gamma - \mu)y = 0, \quad (\gamma - \mu)z = 0.$$

Si $\mu \neq \gamma$, alors $y = z = 0$, puis la première coordonnée donne $(\gamma - \mu)x = 0$, donc $x = 0$, ce qui contredit $X \neq 0$. La seule valeur propre possible est donc γ . Si une base de vecteurs propres existait, h agirait comme la multiplication par γ sur chacun de ses vecteurs, donc sur tout l'espace. Cela imposerait $H = \gamma I_3$, contrairement à $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Dans ce cas, h n'est pas diagonalisable.

En conclusion, h est diagonalisable si et seulement si $\lambda \neq \gamma$ ou $\alpha = \beta = 0$.

Exercice II

1. Question adaptée au programme actuel : la convention « positive ou nulle » est explicitée dans l'énoncé.

La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$. La continuité de la racine carrée sur cet ensemble implique celle de $t \mapsto \sqrt{g(t)}$ sur $[0, 1]$.

L'intégrale d'une fonction continue avec borne supérieure variable est continue ; ainsi, h est continue sur $[0, 1]$. Pour $0 \leq x \leq 1$, l'intégrande est positive ou nulle et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc

$$h(x) = 2 \int_0^x \sqrt{g(t)} dt \geq 0.$$

La fonction h a donc bien les deux propriétés demandées. En particulier, « positive » ne peut pas signifier ici « strictement positive », puisque $h(0) = 0$.

2. La question 1 assure par récurrence que toutes les fonctions f_n sont définies, continues et positives ou nulles sur $[0, 1]$. On peut donc calculer successivement

$$f_1(x) = 2 \int_0^x 1 dt = 2x,$$

$$f_2(x) = 2\sqrt{2} \int_0^x t^{1/2} dt = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2},$$

$$f_3(x) = 2\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \int_0^x t^{3/4} dt = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}} x^{7/4}.$$

Les primitives utilisées sont valables sur $[0, 1]$, leurs exposants étant strictement positifs après intégration.

3. Question adaptée au programme actuel : la convention pour la fonction $x \mapsto x^0$ est explicitée en 0.

On part de $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, avec cette convention. Supposons $f_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{b_{n-1}}$, avec $a_{n-1} > 0$ et $b_{n-1} \geq 0$. Alors

$$f_n(x) = 2\sqrt{a_{n-1}} \int_0^x t^{b_{n-1}/2} dt = \frac{2\sqrt{a_{n-1}}}{1 + b_{n-1}/2} x^{1+b_{n-1}/2}.$$

On peut donc définir

$$b_n = 1 + \frac{b_{n-1}}{2}, \quad a_n = \frac{2\sqrt{a_{n-1}}}{b_n}.$$

Ces relations assurent $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour $n \geq 1$, ce qui ferme la récurrence. Pour calculer b_n , on écrit

$$b_n - 2 = \frac{1}{2}(b_{n-1} - 2).$$

Comme $b_0 - 2 = -2$, il vient, pour tout $n \geq 0$,

$$b_n = 2 - 2^{1-n} = 2(1 - 2^{-n}).$$

En particulier, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}}}{1 - 2^{-n}}.$$

Le dénominateur est strictement positif, et les logarithmes employés ensuite sont donc définis.

4. Prenons le logarithme de la relation précédente :

$$\ln(a_n) = \frac{1}{2} \ln(a_{n-1}) - \ln(1 - 2^{-n}).$$

Après multiplication par 2^n , on obtient

$$2^n \ln(a_n) - 2^{n-1} \ln(a_{n-1}) = -2^n \ln(1 - 2^{-n}).$$

En sommant cette égalité pour les indices de 1 à n , les termes du membre de gauche se simplifient deux à deux. Comme $\ln(a_0) = 0$, on trouve exactement

$$2^n \ln(a_n) = - \sum_{k=1}^n 2^k \ln(1 - 2^{-k}).$$

5. (a) Pour $x \in [0, 1[$, les fonctions intégrées ci-dessous sont continues sur $[0, x]$. On a

$$-\ln(1-x) - x = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1 \right) dt = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt.$$

Pour $0 \leq t \leq x < 1$, on peut encadrer l'intégrande par

$$0 \leq \frac{t}{1-t} \leq \frac{t}{1-x}.$$

L'intégration de ces inégalités donne

$$0 \leq -\ln(1-x) - x \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2(1-x)}.$$

L'égalité aux deux bornes de l'encadrement est aussi satisfaite pour $x = 0$.

5. (b) Pour $k \geq 1$, on a $0 < 2^{-k} \leq \frac{1}{2}$. Appliquons 5(a) avec $x = 2^{-k}$ et multiplions par $2^k > 0$:

$$0 \leq -2^k \ln(1 - 2^{-k}) - 1 \leq \frac{2^{-k}}{2(1 - 2^{-k})} \leq 2^{-k}.$$

Le terme encadré étant positif ou nul, sa valeur absolue est égale à lui-même. L'inégalité demandée en découle.

5. (c) En additionnant les encadrements précédents pour k allant de 1 à n , puis en utilisant la question 4, il vient

$$0 \leq 2^n \ln(a_n) - n \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} = 1 - 2^{-n} \leq 1.$$

Pour $n \geq 1$, on peut diviser par n , ce qui donne

$$1 \leq \frac{\ln(a_n)}{n/2^n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Le théorème d'encadrement assure donc

$$\ln(a_n) \sim \frac{n}{2^n}.$$

6. Par croissance comparée, $n/2^n \rightarrow 0$. L'équivalent précédent donne $\ln(a_n) \rightarrow 0$; par continuité de l'exponentielle, $a_n \rightarrow 1$. Par ailleurs, $b_n = 2 - 2^{1-n} \rightarrow 2$.

Fixons $x \in]0, 1]$. Puisque $\ln x$ est un réel fixé,

$$x^{b_n} = \exp(b_n \ln x) \rightarrow \exp(2 \ln x) = x^2.$$

Par produit des limites, $f_n(x) = a_n x^{b_n} \rightarrow x^2$. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc la même conclusion est vraie.

Finalement, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers x^2 .

Exercice III

Question adaptée au programme actuel — préambule. La propriété de Markov a été explicitée : elle permet d'utiliser les règles de transition après une histoire donnée, et pas seulement après la connaissance d'un état isolé. Cette précision est nécessaire pour justifier les calculs portant sur des trajectoires, notamment aux questions 4 et 5. Les coefficients de Π sont positifs ou nuls et chaque ligne a pour somme 1. On utilise la convention ligne $V_n = (p_n, q_n, r_n, s_n)$ et $V_{n+1} = V_n \Pi$. Les transitions depuis un état de probabilité nulle sont des règles du modèle ; aucun conditionnement par un événement nul n'est effectué.

1. Comme $X_0 = 1$ avec probabilité 1, la loi au premier instant est la première ligne de Π :

$$p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}.$$

Pour atteindre les cases 1, 2 ou 3 au deuxième instant, on peut partir de 1, 2 ou 3. Les trois probabilités sont identiques et valent

$$\frac{1}{4} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{1}{3} = \frac{1}{16} + \frac{1}{6} = \frac{11}{48}.$$

Pour la case 4, seules les cases 1 et 4 contribuent, d'où

$$s_2 = \frac{1}{4} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

Ainsi, $p_2 = q_2 = r_2 = \frac{11}{48}$ et $s_2 = \frac{5}{16}$. La somme vaut bien $3 \times \frac{11}{48} + \frac{5}{16} = 1$.

2. (a) Les événements $\{X_n = i\}$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, forment un système complet. La formule des probabilités totales, ou le produit $V_n \Pi$, donne

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n,$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n,$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n,$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + s_n.$$

Ces égalités restent valables si certains états ont une probabilité nulle : leur contribution à la somme est alors nulle.

2. (b) Les trois premières relations montrent que $p_n = q_n = r_n$ pour tout $n \geq 1$. On obtient donc, pour $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) p_n = \frac{11}{12} p_n.$$

Posons $a = \frac{11}{12}$, de sorte que $0 < a < 1$. Comme $p_1 = \frac{1}{4}$, on en déduit

$$p_n = q_n = r_n = \frac{1}{4} a^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Les quatre probabilités ont pour somme 1, donc

$$s_n = 1 - \frac{3}{4} a^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

L'instant initial reste traité séparément : $(p_0, q_0, r_0, s_0) = (1, 0, 0, 0)$.

3. (a) Pour $n = 0$, le pion est en case 1, donc

$$P(X_1 = 4 \mid X_0 \neq 4) = \frac{1}{4}.$$

Pour $n \geq 1$, on a $P(X_n \neq 4) = \frac{3}{4}a^{n-1} > 0$. Pour entrer en case 4 depuis l'une des trois autres cases, il faut venir de la case 1. Ainsi,

$$P(X_{n+1} = 4, X_n \neq 4) = \frac{1}{4}p_n = \frac{1}{16}a^{n-1}.$$

Le quotient donnant la probabilité conditionnelle vaut donc

$$P(X_{n+1} = 4 \mid X_n \neq 4) = \frac{(1/16)a^{n-1}}{(3/4)a^{n-1}} = \frac{1}{12}, \quad n \geq 1.$$

La distinction avec $n = 0$ est indispensable : la loi conditionnelle dans les trois cases non absorbantes n'est uniforme qu'à partir de l'instant 1.

3. (b) Comme la case 4 est absorbante, l'événement « première arrivée en 4 à l'instant n » coïncide, à un événement de probabilité nulle près, avec $\{X_{n-1} \neq 4, X_n = 4\}$.

On peut donc aussi écrire $t_n = s_n - s_{n-1}$.

Pour $n = 1$, on a $t_1 = s_1 = \frac{1}{4}$. Pour $n \geq 2$, la question précédente donne

$$t_n = P(X_{n-1} \neq 4) \frac{1}{12} = \frac{3}{4}a^{n-2} \frac{1}{12} = \frac{1}{16}a^{n-2}.$$

Ainsi,

$$t_1 = \frac{1}{4}, \quad t_n = \frac{1}{16} \left(\frac{11}{12} \right)^{n-2} \quad (n \geq 2).$$

3. (c) Notons A_n l'événement « le pion n'a pas atteint la case 4 jusqu'à l'instant n inclus ». L'absorption donne $P(A_n) = 1 - s_n = \frac{3}{4}a^{n-1}$ pour $n \geq 1$. La suite (A_n) est décroissante et l'événement « jamais en 4 » est son intersection.

Par continuité des probabilités pour une suite décroissante d'événements,

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4}a^{n-1} = 0.$$

Le pion atteint donc la case 4 avec probabilité 1. Cela se vérifie aussi en additionnant les probabilités des premières arrivées :

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \frac{1}{1-a} = 1.$$

3. (d) Méthode 1 — Sommes des moments.

La loi établie en 3(b) permet de calculer les moments. Pour $0 < a < 1$, les séries géométriques et leurs deux premières dérivées donnent

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}.$$

La dernière identité résulte aussi de $k^2 = k(k-1) + k$. Ces trois séries convergent, et tous leurs termes sont positifs ou nuls. Elles assurent en particulier la convergence des séries définissant $E(T)$ et $E(T^2)$, après le changement d'indice $k = n - 2$.

Avec $a = \frac{11}{12}$, les trois sommes valent respectivement 12, 132 et 3036. Par conséquent,

$$E(T) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) a^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} (132 + 24) = 10.$$

De même,

$$E(T^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^2 a^k,$$

$$E(T^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} (3036 + 4 \times 132 + 4 \times 12) = 226.$$

La formule de Kœnig-Huygens donne alors

$$V(T) = 226 - 10^2 = 126.$$

Méthode 2 — Reconnaissance d'une loi géométrique après le premier instant.

L'événement $B = \{T > 1\}$ a pour probabilité $\frac{3}{4}$. Pour $k \geq 1$, le quotient des probabilités donne

$$P(T - 1 = k \mid B) = \frac{t_{k+1}}{3/4} = \frac{1}{12} a^{k-1}.$$

Sous la probabilité conditionnelle sachant B , la variable $T - 1$ suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{12}$. Ses moments usuels sont finis et valent

$$E(G) = 12, \quad V(G) = 132, \quad E(G^2) = 132 + 12^2 = 276,$$

où G désigne une variable de cette loi. En séparant dans les sommes définissant les moments le cas $T = 1$ et le cas $T > 1$, on obtient

$$E(T) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4}(1 + E(G)) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times 13 = 10,$$

$$E(T^2) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4}(1 + 2E(G) + E(G^2)) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 + 24 + 276) = 226.$$

Ces égalités sont de simples regroupements de séries de probabilités ; elles n'emploient pas un théorème d'espérance conditionnelle. On retrouve $V(T) = 126$.

La première méthode exploite directement la loi ; la seconde met en évidence le temps d'attente géométrique après le premier déplacement, dont le risque d'absorption diffère de celui de l'instant initial.

4. Pour ne visiter ni 2 ni 3 jusqu'à l'instant $n \geq 1$, le pion doit soit rester en 1 jusqu'à l'instant n , soit rester en 1 pendant les premiers instants puis passer en 4, où il demeure.

Grâce aux règles de transition markoviennes, la trajectoire restant en 1 pendant les n premiers déplacements a pour probabilité 4^{-n} . Celle qui reste en 1 jusqu'à l'instant $k - 1$ puis entre en 4 à l'instant k a pour probabilité 4^{-k} . Ces événements sont disjoints pour $1 \leq k \leq n$.

La probabilité d'éviter 2 et 3 jusqu'à l'instant n est donc

$$u_n = 4^{-n} + \sum_{k=1}^n 4^{-k} = 4^{-n} + \frac{1}{3}(1 - 4^{-n}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^{-n}.$$

Les événements correspondants forment une suite décroissante. Le passage à l'intersection donne la probabilité d'éviter ces deux cases pour toujours :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{3}.$$

Cette démonstration inclut le cas de la trajectoire restant indéfiniment en case 1, dont la probabilité est nulle.

5. (a) Le dénominateur $P(X_2 = 4) = \frac{5}{16}$ est strictement positif. La formule des probabilités composées donne

$$P(X_1 = 1, X_2 = 4) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 4 \mid X_1 = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ainsi,

$$P(X_1 = 1 \mid X_2 = 4) = \frac{1/16}{5/16} = \frac{1}{5}.$$

5. (b) Pour $0 < m < n$, on a $m \geq 1$ et $n - m \geq 1$. Par homogénéité et propriété de Markov, sachant $X_m = 1$, l'évolution à partir de l'instant m suit les mêmes règles que celle du pion initialement en case 1. Le résultat 2(b), appliqué à une durée de $n - m$ déplacements, donne donc

$$P(X_n = 4 \mid X_m = 1) = 1 - \frac{3}{4}a^{n-m-1}.$$

Ce conditionnement est licite car $P(X_m = 1) = \frac{1}{4}a^{m-1} > 0$. D'autre part,

$$P(X_n = 4) = 1 - \frac{3}{4}a^{n-1} \geq \frac{1}{4} > 0.$$

La formule de Bayes donne finalement

$$P(X_m = 1 \mid X_n = 4) = \frac{\frac{1}{4}a^{m-1} \left(1 - \frac{3}{4}a^{n-m-1}\right)}{1 - \frac{3}{4}a^{n-1}}, \quad a = \frac{11}{12}.$$

Pour $m = 1$ et $n = 2$, elle redonne $\frac{1}{5}$, conformément à la question précédente.

Relevé des adaptations

- Exercice II, questions 1 et 3 : les conventions «positive ou nulle» et $x^0 = 1$, y compris en 0, sont explicitées pour lever des ambiguïtés de rédaction. Les fonctions et les questions sont conservées.
- Exercice III, préambule, utilisé notamment en 4 et 5(b) : propriété de Markov homogène explicitée, afin que les probabilités de trajectoires et les transitions sur plusieurs instants soient déterminées par le modèle. La seule donnée des conditionnements à un pas dans le texte initial ne suffit pas à ces calculs. La matrice et toutes les probabilités numériques sont conservées ; les transitions sont présentées comme règles du modèle, y compris depuis les états qui ont momentanément une probabilité nulle.