



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1996

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE I

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à sa colonne de coordonnées dans la base canonique. Posons $s = \sqrt{2}$.

1. (a) Pour déterminer les valeurs propres de J sans déterminant, considérons les vecteurs

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les produits directs donnent $Jv_+ = sv_+$, $Jv_0 = 0$ et $Jv_- = -sv_-$. Ces trois vecteurs non nuls sont associés à trois valeurs propres distinctes; ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, J est diagonale, ce qui montre que ses seules valeurs propres sont

$$\text{Sp}(J) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}.$$

Pour K , la relation ${}^t(K(x, y, z)) = {}^t(z, y, x)$ montre que

$$\text{Ker}(K - I) = \{{}^t(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{Ker}(K + I) = \{{}^t(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Ces espaces ont respectivement pour bases $({}^t(1, 0, 1), {}^t(0, 1, 0))$ et (v_0) . Leur réunion fournit trois vecteurs indépendants, donc une base dans laquelle K est diagonale. Ainsi $\text{Sp}(K) = \{-1, 1\}$.

1. (b) Les vecteurs v_+ et v_- ont leurs première et troisième coordonnées égales, donc $Kv_+ = v_+$ et $Kv_- = v_-$. En outre $Kv_0 = -v_0$.

La base $\mathcal{B} = (v_+, v_0, v_-)$ diagonalise donc simultanément j et k :

$$[j]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(s, 0, -s), \quad [k]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(1, -1, 1).$$

Si P est la matrice dont les colonnes sont ces trois vecteurs, P est inversible et ces égalités s'écrivent $P^{-1}JP = \text{diag}(s, 0, -s)$ et $P^{-1}KP = \text{diag}(1, -1, 1)$.

2. (a) Écrivons une combinaison linéaire :

$$xI + yJ + zK = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x+z & y \\ z & y & x \end{pmatrix}.$$

Si cette matrice est nulle, sa première ligne donne successivement $x = y = z = 0$. Ainsi (I, J, K) est libre. Puisqu'elle engendre E par définition, c'est une base de E et $\dim E = 3$.

2. (b) Le calcul des produits fournit

$$J^2 = I + K, \quad K^2 = I, \quad JK = KJ = J.$$

Pour $A = xI + yJ + zK$ et $B = x'I + y'J + z'K$, la distributivité et ces identités donnent

$$AB = (xx' + yy' + zz')I + (xy' + yx' + yz' + zy')J + (xz' + zx' + yy')K.$$

Les trois coefficients étant réels, $AB \in E$. L'espace E est donc stable par multiplication.

2. (c) Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de T est

$$P^{-1}TP = \text{diag}(x + sy + z, x - z, x - sy + z).$$

Les valeurs propres de T sont donc les nombres $x + \sqrt{2}y + z$, $x - z$ et $x - \sqrt{2}y + z$. Certains peuvent coïncider ; le spectre est l'ensemble de leurs valeurs distinctes.

3. Méthode 1 — Diagonalisation commune.

Comme $J \in E$ et que E est stable par multiplication, une récurrence donne $J^n \in E$ pour tout $n \geq 1$. La base (I, J, K) assure l'existence et l'unicité des coefficients a_n, b_n, c_n .

Dans la base $\mathcal{B}$, l'égalité demandée devient

$$a_n + sb_n + c_n = s^n, \quad a_n - c_n = 0, \quad a_n - sb_n + c_n = (-s)^n.$$

La deuxième relation donne $c_n = a_n$. L'addition puis la soustraction de la première et de la troisième donnent

$$a_n = c_n = \frac{s^n + (-s)^n}{4}, \quad b_n = \frac{s^n - (-s)^n}{2s}, \quad n \geq 1.$$

Méthode 2 — Produits et parité.

Les relations de 2. (b) donnent $J^2 = I + K$ et

$$(I + K)^2 = I + 2K + K^2 = 2(I + K).$$

Par récurrence sur $p \geq 1$, on obtient $(I + K)^p = 2^{p-1}(I + K)$. Ainsi

$$J^{2p} = 2^{p-1}(I + K) \quad (p \geq 1), \quad J^{2p+1} = 2^p J \quad (p \geq 0).$$

Pour la seconde égalité avec $p \geq 1$, on a utilisé $(I + K)J = 2J$; le cas $p = 0$ est $J^1 = J$. Donc, si $n = 2p$, $a_n = c_n = 2^{p-1}$ et $b_n = 0$, tandis que si $n = 2p + 1$, $a_n = c_n = 0$ et $b_n = 2^p$. Ces formules coïncident avec celles de la première méthode.

La première approche s'applique directement après un changement de base; la seconde exploite la relation simple entre J^2 , I et K .

4. (a) Pour $V = (x, y, z)$ et $W = (x', y', z')$, la définition de Φ et les opérations matricielles donnent, pour tous réels α, β ,

$$\Phi(\alpha V + \beta W) = \alpha \Phi(V) + \beta \Phi(W).$$

L'application est donc linéaire. Tout élément de E est de la forme $xI + yJ + zK$, donc Φ est surjective. Si $\Phi(V) = 0$, la liberté de (I, J, K) donne $x = y = z = 0$, donc son noyau est réduit au vecteur nul : elle est injective. C'est par conséquent un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur E .

4. (b) Une matrice diagonale est inversible si et seulement si chacun de ses coefficients diagonaux est non nul; la similitude conserve l'inversibilité. Par 2. (c),

$$H$$

$$= \{(x, y, z) : x - z = 0\} \cup \{(x, y, z) : x + \sqrt{2}y + z = 0\} \cup \{(x, y, z) : x - \sqrt{2}y + z = 0\}.$$

C'est une réunion de trois plans vectoriels. Cette réunion n'est pas stable par addition : $V = e_1 + e_3$ vérifie $x - z = 0$, tandis que $W = e_1 - e_3$ vérifie $x + z = 0$, donc $V, W \in H$. En revanche $V + W = 2e_1$ et $\Phi(2e_1) = 2I$ est inversible, donc $V + W \notin H$. Ainsi H n'est pas un sous-espace vectoriel.

EXERCICE II

1. (a) La fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$. Sur $\mathcal{D}_a$, le dénominateur ne s'annule pas, donc la règle de dérivation d'un quotient s'applique :

$$f'_a(x) = \frac{a(3-a)}{2\sqrt{x}(3-a\sqrt{x})^2}.$$

Le dénominateur de cette expression est strictement positif sur le domaine. Le signe de la dérivée est donc celui de $a(3-a)$.

1. (b) Si $a \leq 0$, le dénominateur initial ne s'annule pour aucun $x > 0$, donc $\mathcal{D}_a =]0, +\infty[$. Si $a > 0$, posons $b = 9/a^2$: alors $\mathcal{D}_a =]0, b[\cup]b, +\infty[$.

Pour $a < 0$, la dérivée est négative, le dénominateur $3 - a\sqrt{x}$ est positif, et les limites sont

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = \frac{3-a}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0^+.$$

x	0^+		$+\infty$
$f'_a(x)$		—	
$f_a(x)$	$(3-a)/3$	$\searrow$	0

La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, strictement décroissante, et admet l'asymptote horizontale $y = 0$ à droite. Le point limite en $x = 0$ n'appartient pas à la courbe.

Pour $0 < a < 3$, le numérateur est positif et la dérivée est positive sur chacune des deux composantes du domaine. On obtient les tableaux suivants.

x	0^+		b^-
$f'_a(x)$		+	
$f_a(x)$	$(3-a)/3$	$\nearrow$	$+\infty$

x	b^+		$+\infty$
$f'_a(x)$		+	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

La première branche est positive et la seconde négative. Les asymptotes sont $x = b$ et $y = 0$.

Pour $a > 3$, le numérateur est négatif et la dérivée est négative sur chaque composante.

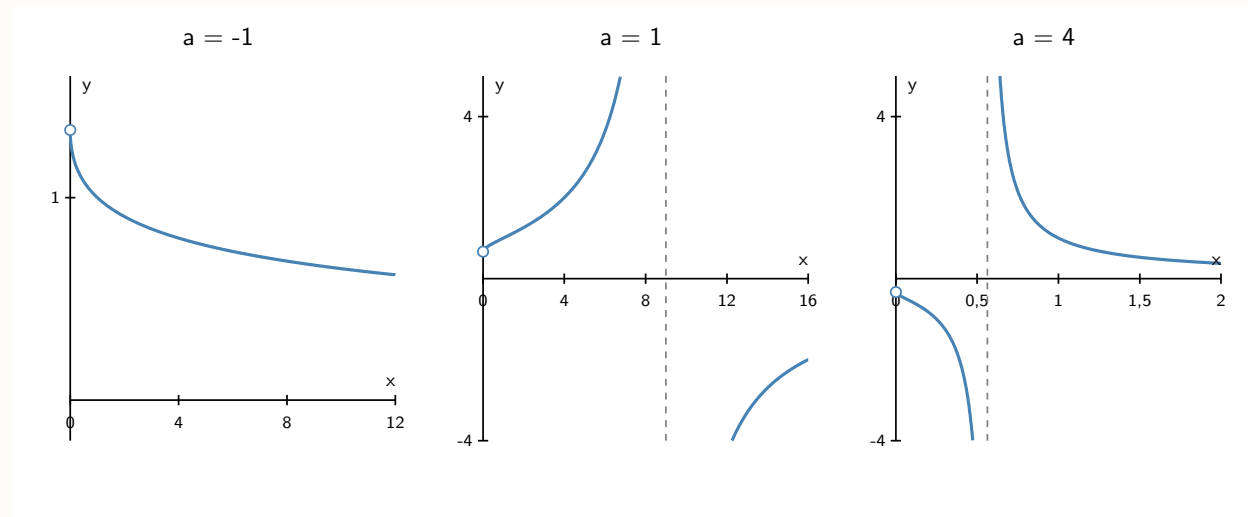
x	0^+		b^-
$f'_a(x)$		—	
$f_a(x)$	$(3-a)/3$	$\searrow$	$-\infty$

x	b^+		$+\infty$
$f'_a(x)$		—	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

La première branche est négative et la seconde positive ; les asymptotes sont encore $x = b$ et $y = 0$.

Enfin, $a = 0$ donne $f_0(x) = 1$ sur $]0, +\infty[$. Pour $a = 3$, $f_3(x) = 0$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$: le point d'abscisse 1 est exclu, mais il n'y a pas d'asymptote verticale puisque les limites y valent 0.

Les trois panneaux ci-dessous illustrent respectivement les cas $a < 0$, $0 < a < 3$ et $a > 3$ par les valeurs $a = -1$, $a = 1$ et $a = 4$. Les courbes sont calculées à partir de la formule exacte; les droites verticales en pointillés sont les asymptotes lorsqu'elles existent. Les fenêtres sont différentes pour rendre les deux branches visibles.



1. (c) Posons $g_a(x) = f_a(x) - x$. Pour $a < 0$, cette fonction est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, car $g'_a(x) = f'_a(x) - 1 < 0$. Sa limite à gauche vaut $(3 - a)/3 > 0$ et sa limite à droite vaut $-\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie lui donnent donc une unique racine.

Pour $a > 3$, on a $f_a(x) < 0 < x$ sur $]0, b[$, donc aucune racine n'y existe. Sur $]b, +\infty[$, g_a est continue, strictement décroissante, de limites $+\infty$ puis $-\infty$; elle y possède exactement une racine.

Dans ces deux cas $a \neq 3$ et $f_a(1) = (3 - a)/(3 - a) = 1$. La racine unique est donc $x = 1$. Lorsque $a > 3$, on a bien $b < 1$, donc cette racine appartient à la seconde composante.

2. (a) Posons $z = \sqrt{x} > 0$, en excluant $z = 3$. L'équation $f_1(x) = x$ équivaut à

$$2 = z^2(3 - z) \iff z^3 - 3z^2 + 2 = 0.$$

La factorisation

$$z^3 - 3z^2 + 2 = (z - 1)(z^2 - 2z - 2) = (z - 1)(z - 1 - \sqrt{3})(z - 1 + \sqrt{3})$$

donne trois racines réelles en z . La racine $1 - \sqrt{3}$ est négative et ne peut être une racine carrée. Les deux autres sont 1 et $1 + \sqrt{3}$, toutes deux différentes de 3 puisque $1 + \sqrt{3} < 3$. Il y a donc exactement deux solutions :

$$x = 1, \quad x = \lambda_1 = (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}.$$

On a $1 < \lambda_1 < 9$.

2. (b) Pour $z = \sqrt{x} > 0$ et $z \neq 3$,

$$f_1(x) - x = \frac{(z - 1)(z - 1 - \sqrt{3})(z - 1 + \sqrt{3})}{3 - z}.$$

Le facteur $z - 1 + \sqrt{3}$ est toujours positif. Les autres changent de signe respectivement en $z = 1$, $z = 1 + \sqrt{3}$ et $z = 3$. Il en résulte :

Intervalle de x	$]0, 1[$	$]1, \lambda_1[$	$]\lambda_1, 9[$	$]9, +\infty[$
Signe de $f_1(x) - x$	+	−	+	−

La courbe de f_1 est donc au-dessus de la droite $y = x$ sur $]0, 1[$ et $]\lambda_1, 9[$, et en dessous sur $]1, \lambda_1[$ et $]9, +\infty[$. Elle la rencontre aux points $(1, 1)$ et (λ_1, λ_1) .

2. (c) La fonction f_1 est positive et strictement croissante sur $]0, 9[$. Comme $\lambda_1 < 9$ et $f_1(\lambda_1) = \lambda_1$, pour tout $x \in]0, \lambda_1[$,

$$0 < f_1(x) \leq f_1(\lambda_1) = \lambda_1.$$

L'intervalle $]0, \lambda_1]$ est donc stable par f_1 et contenu dans son domaine. Une récurrence, initialisée par $u_0 = \alpha \in]0, \lambda_1]$, montre que chaque u_n appartient à cet intervalle. Tous les termes de la suite sont bien définis.

2. (d) Si $0 < \alpha < 1$, alors $0 < x < 1$ implique, par 2. (b) et la stricte croissance de f_1 ,

$$x < f_1(x) < f_1(1) = 1.$$

Par récurrence, $u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout n . La suite est strictement croissante et majorée ; elle converge vers une limite $\ell \in [\alpha, 1]$. La continuité de f_1 sur cet intervalle donne $\ell = f_1(\ell)$, donc $\ell = 1$, seule racine fixe dans cet intervalle.

Si $\alpha = 1$, la suite est constante égale à 1.

Si $1 < \alpha < \lambda_1$, pour $1 < x < \lambda_1$, on a

$$1 = f_1(1) < f_1(x) < x.$$

La suite reste dans $]1, \alpha]$, elle est strictement décroissante et minorée par 1. Sa limite $\ell \in [1, \alpha]$ vérifie $\ell = f_1(\ell)$ par continuité. Comme $\alpha < \lambda_1$, la seule possibilité est encore $\ell = 1$.

Si $\alpha = \lambda_1$, la suite est constante égale à λ_1 .

Ainsi $\lim u_n = 1$ pour $0 < \alpha < \lambda_1$, et $\lim u_n = \lambda_1$ pour $\alpha = \lambda_1$. Les deux cas constants sont à la fois croissants et décroissants au sens large.

3. (a) Comme $z = 1$ est racine, on factorise :

$$az^3 - 3z^2 + 3 - a = (z - 1)(az^2 + (a - 3)z + a - 3).$$

Le discriminant du second facteur est

$$\Delta = (a - 3)^2 - 4a(a - 3) = 3(3 - a)(a + 1) > 0$$

puisque $0 < a < 3$. Les solutions réelles de (*) sont donc 1 et

$$z_- = \frac{3 - a - \sqrt{3(3 - a)(a + 1)}}{2a}, \quad z_+ = \frac{3 - a + \sqrt{3(3 - a)(a + 1)}}{2a}.$$

Le produit $z_- z_+ = (a - 3)/a$ est négatif et $z_+ > 0$ par sa formule ; ainsi $z_- < 0 < z_+$. Pour $a = 2$, $z_+ = 1$: la racine 1 est alors double et les racines distinctes sont 1 et $-1/2$. Pour $a \neq 2$, les trois racines écrites sont distinctes.

3. (b) Si $x \in \mathcal{D}_a$ vérifie $f_a(x) = x$, on peut multiplier par le dénominateur non nul :

$$3 - a = x(3 - a\sqrt{x}).$$

Avec $z = \sqrt{x}$ et $x = z^2$, cela donne $az^3 - 3z^2 + 3 - a = 0$. La racine carrée de toute solution est donc une racine strictement positive de (*).

3. (c) La question précédente ne donne qu'une implication ; vérifions aussi l'admissibilité des candidats. La racine z_- est négative, donc elle est exclue. Comme $a < 3$, $1 < 3/a$, donc $x = 1$ appartient au domaine et vérifie l'équation.

Posons $q(z) = az^2 + (a - 3)z + a - 3$. On a $q(0) = a - 3 < 0$ et $q(3/a) = a > 0$. Comme q n'a qu'une racine positive, celle-ci vérifie $0 < z_+ < 3/a$. Ainsi z_+^2 appartient au domaine. En remontant les équivalences de 3. (b), sans annuler le dénominateur, on vérifie que c'est bien une solution.

Les solutions sont donc 1 et

$$\lambda_a = \left(\frac{3 - a + \sqrt{3(3 - a)(a + 1)}}{2a} \right)^2.$$

Pour les comparer, calculons $q(1) = 3(a - 2)$. Sur les réels positifs, q est négatif avant z_+ et positif après z_+ , car son autre racine est négative et son coefficient dominant est positif. Il en résulte :

- Si $0 < a < 2$, $1 < z_+$, donc $1 < \lambda_a < 9/a^2$: deux solutions distinctes.
- Si $a = 2$, $z_+ = 1$, donc $\lambda_a = 1$: une seule solution distincte.
- Si $2 < a < 3$, $0 < z_+ < 1$, donc $0 < \lambda_a < 1 < 9/a^2$: deux solutions distinctes.

EXERCICE III

1. (a) On peut compter les parties de E en décidant successivement, pour chaque boule, de l'inclure ou non. À chaque nouvelle boule le nombre de choix est doublé ; il y a donc 2^m parties, toutes équiprobables.

Les parties contenant la boule 1 sont en bijection avec les parties des $m - 1$ autres boules : il y en a 2^{m-1} . Ainsi $P(A_1) = 2^{m-1}/2^m = 1/2$.

1. (b) Soient r indices distincts $i_1, \dots, i_r$, avec $1 \leq r \leq m$. Une partie contenant ces r boules est obtenue en choisissant librement une partie des $m - r$ autres boules. Il y en a 2^{m-r} , donc

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = 2^{-r} = \prod_{j=1}^r P(A_{i_j}).$$

Cette égalité pour toute sous-famille est la définition de l'indépendance mutuelle des événements $A_1, \dots, A_m$. Ils sont donc mutuellement indépendants.

1. (c) Notons N le nombre de boules tirées. Il est borné entre 0 et m , donc son espérance et sa variance existent.

Méthode 1 — Reconnaissance d'une loi binomiale.

Pour chaque boule, son indicatrice d'appartenance au tirage suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Ces indicatrices sont indépendantes d'après 1. (b), et leur somme est N . Donc N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m, 1/2)$. Les formules de cette loi donnent

$$E(N) = \frac{m}{2}, \quad V(N) = m \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{m}{4}.$$

Méthode 2 — Somme d'indicatrices.

Posons $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$. On a

$$N = \sum_{i=1}^m X_i,$$

$E(X_i) = 1/2$ et $V(X_i) = 1/4$. La linéarité de l'espérance donne

$$E(N) = \sum_{i=1}^m 1/2 = m/2.$$

L'indépendance des X_i annule leurs covariances ; la formule de la variance d'une somme donne

$$V(N) = \sum_{i=1}^m 1/4 = m/4.$$

La première méthode fournit aussi toute la loi ; la seconde calcule directement les moments et reste utile quand une somme n'a pas de loi usuelle.

1. (d) Méthode 1 — Bijection sur les parties.

Associons à toute partie S la partie obtenue en retirant la boule 1 si elle est présente, et en l'ajoutant sinon. Cette opération se défait en la répétant et change la parité du nombre de boules. Elle donne donc une bijection entre parties de cardinal pair et parties de cardinal impair.

Les parties étant équiprobables, les deux probabilités sont égales. Leur somme est 1, donc elles valent chacune $1/2$. La probabilité d'un nombre pair n'est donc pas supérieure.

Méthode 2 — Binôme de Newton.

La loi binomiale obtenue en 1. (c) donne $P(N = j) = 2^{-m} \binom{m}{j}$. La différence des probabilités de parité vaut

$$P(N \text{ pair}) - P(N \text{ impair}) = 2^{-m} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} = 2^{-m} (1 - 1)^m = 0.$$

Comme $m \geq 2$, il n'y a aucune ambiguïté sur cette dernière puissance. On retrouve les deux probabilités égales à $1/2$. La bijection explique directement l'égalité; le binôme la traduit par une identité de sommes finies.

2. (a) Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des tirages successifs, nécessaire pour calculer les probabilités composées, est explicitée dans l'énoncé.

À chaque tirage la boule i apparaît avec probabilité $1/2$. Sa première apparition au rang k exige $k - 1$ absences suivies d'une présence. L'indépendance des tirages donne

$$P(T_i = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = 2^{-k}, \quad k \geq 1.$$

2. (b) Les événements précédents ont des probabilités de somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1;$$

la première apparition est donc finie presque sûrement. La variable T_i suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1/2$. Elle admet une espérance et

$$E(T_i) = \frac{1}{1/2} = 2.$$

On peut aussi contrôler directement l'existence par la série géométrique dérivée :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = 1/(1-q)^2$$

pour $|q| < 1$. À $q = 1/2$, elle donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k2^{-k} = 2,$$

série positive et convergente.

2. (c) Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans l'original : les variables $T_1, \dots, T_m$ sont indépendantes. Il permet de multiplier leurs probabilités de répartition.

On a $T = \max(T_1, \dots, T_m)$. Pour $k \geq 1$, l'événement $[T \leq k]$ est l'intersection des événements $[T_i \leq k]$. Or $P(T_i > k) = 2^{-k}$, puisque les k premiers tirages doivent tous éviter la boule i . Ainsi

$$P(T \leq k) = \prod_{i=1}^m P(T_i \leq k) = (1 - 2^{-k})^m.$$

Cette probabilité tend vers 1, ce qui confirme que toutes les boules finissent par apparaître presque sûrement. Comme $P(T \leq 0) = 0$, la loi de T est

$$P(T = k) = (1 - 2^{-k})^m - (1 - 2^{-(k-1)})^m, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

La formule vaut aussi pour $k = 1$, où elle donne 2^{-m} ; $P(T = k) = 0$ pour tout entier $k \leq 0$.

3. (a) Question adaptée au programme actuel : l'uniformité du tirage parmi les parties des boules restantes est précisée conditionnellement aux tirages passés. C'est l'hypothèse utilisée dans les calculs suivants.

Conditionnons par la partie S obtenue au premier tirage. Si elle contient j boules, il reste $m - j$ boules ; pour avoir terminé au deuxième tirage, il faut tirer leur totalité, ce qui a probabilité $2^{-(m-j)}$. Cette formule vaut aussi pour $j = m$: la seule partie de l'ensemble vide est l'ensemble vide et sa probabilité est 1.

Il y a $\binom{m}{j}$ parties S de taille j , car cela revient à choisir j boules parmi les m boules. La formule des probabilités totales sur les 2^m parties donne

$$\begin{aligned} P(\text{tout tiré en au plus deux tirages}) &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} 2^{-m} 2^{-(m-j)} = 2^{-2m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} 2^j \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^m. \end{aligned}$$

La probabilité de tout tirer dès le premier tirage est 2^{-m} . Ces événements étant emboîtés,

$$P(\text{tout tiré en exactement deux tirages}) = \left(\frac{3}{4}\right)^m - 2^{-m}.$$

3. (b) Suivons l'indication de récurrence. Pour un entier $r \geq 0$, notons $q_k(r)$ la probabilité de terminer en au plus k tirages en partant de r boules. Lorsque $r = 0$, $q_k(0) = 1$.

Pour un tirage, une seule partie convient, donc $q_1(r) = 2^{-r} = (1 - 2^{-1})^r$, y compris pour $r = 0$.

Supposons, pour un $k \geq 1$, que $q_k(r) = (1 - 2^{-k})^r$ pour tout entier $r \geq 0$.

Conditionnellement à une première partie tirée de cardinal j , le dispositif poursuit exactement la même expérience avec les $m - j$ boules restantes. Comme chaque partie initiale a probabilité 2^{-m} , les probabilités totales donnent

$$q_{k+1}(m) = 2^{-m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} q_k(m-j) = 2^{-m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1 - 2^{-k})^{m-j}.$$

Par le binôme de Newton, cette somme vaut $2^{-m}(1 + 1 - 2^{-k})^m$, donc

$$q_{k+1}(m) = (1 - 2^{-(k+1)})^m.$$

Le raisonnement est valable pour tout nombre initial de boules, ce qui établit l'hérédité. Par récurrence,

$$P(\text{les } m \text{ boules sont toutes tirées en au plus } k \text{ tirages}) = (1 - 2^{-k})^m, \quad k \geq 1.$$

On retrouve la même probabilité de terminaison qu'en 2. (c), bien que les protocoles diffèrent après la première apparition de chaque boule.

Relevé des adaptations

- III.2, notamment III.2. (a) : indépendance des tirages successifs explicitée ; la seule remise des boules ne suffirait pas à la garantir.
- III.3, notamment III.3. (a)–(b) : uniformité conditionnelle de chaque tirage sur les parties des boules restantes explicitée afin de déterminer sans ambiguïté les probabilités du protocole successif.