



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1995

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE I

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

et soit n un entier strictement positif fixé.

Cet exercice a pour but de déterminer toutes les matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation

$$(*) \quad X^n = A^n.$$

On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans cette base.

1. (a) Déterminer l'image par ϕ du vecteur $-2e_1 + e_2 + 2e_3$.
1. (b) Déterminer le noyau de ϕ .
1. (c) Montrer que 2 est une valeur propre de ϕ et déterminer le sous-espace propre associé.
1. (d) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
1. (e) Déterminer les valeurs propres de la matrice A^n .
2. (a) Montrer que si l'équation $(*)$ admet une solution X , alors $XA^n = A^nX$.
2. (b) En déduire que si (f_1, f_2, f_3) est une base formée de vecteurs propres de A , c'est aussi une base de vecteurs propres de X .

2. (c) Déterminer une matrice Q telle que les matrices $Q^{-1}AQ$ et $Q^{-1}XQ$ soient toutes les deux diagonales.
3. (a) Si n est un nombre impair, déterminer toutes les solutions de (*).
3. (b) Si n est un nombre pair, déterminer toutes les solutions de (*).

EXERCICE II

Soit f la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par la relation

$$f(t) = \frac{e^t}{t}.$$

1. (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante.
1. (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\frac{e^n}{n} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}.$$

Montrer que l'équation

$$\frac{e^x}{x} = \int_n^{n+1} f(t) dt$$

admet une solution et une seule dans l'intervalle $[n, n+1]$. On notera u_n cette solution, ce qui définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul p ,

$$0 \leq \int_1^2 f(t) dt - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(1 + \frac{k}{p}\right) \leq \frac{1}{p} [f(2) - f(1)].$$

2. (b) En utilisant la méthode des rectangles, donner une valeur approchée à 0,1 près de l'intégrale $\int_1^2 f(t) dt$. En déduire une valeur approchée de u_1 à 0,1 près.

3. (a) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

3. (b) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t^2} dt}{\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t} dt} = 0.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = \ln(e - 1).$$

EXERCICE III

La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1 dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. La roue est lancée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. L'angle, exprimé en radians, dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire U de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité

$$f_U(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u} & \text{si } u \geq 0, \\ 0 & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

La roue porte une marque M située initialement au point de coordonnées $(1, 0)$. Pour une rotation déterministe d'angle $u \geq 0$, on note $x(u)$ et $y(u)$ les coordonnées de cette marque. Ces fonctions sont continues, à valeurs dans $[-1, 1]$, et vérifient $x(u)^2 + y(u)^2 = 1$. Après l'arrêt, on note $X = x(U)$ et $Y = y(U)$.

1. (a) Pour $\lambda > 0$ et $T > 0$, on pose

$$I(T) = \int_0^T x(u)e^{-\lambda u} du, \quad J(T) = \int_0^T y(u)e^{-\lambda u} du.$$

On admet l'absolue convergence des deux intégrales sur $[0, +\infty[$, ainsi que les identités particulières suivantes :

$$I(T) = y(T)e^{-\lambda T} - \lambda x(T)e^{-\lambda T} + \lambda - \lambda^2 I(T),$$

$$J(T) = -x(T)e^{-\lambda T} + 1 - \lambda y(T)e^{-\lambda T} - \lambda^2 J(T).$$

1. (b) En déduire les limites de $I(T)$ et de $J(T)$ quand T tend vers $+\infty$.
1. (c) Calculer l'espérance des variables aléatoires X et Y en fonction du paramètre λ .

2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la condition $Y \geq \frac{1}{2}$.

2. (a) On admet la caractérisation géométrique suivante : le joueur gagne si et seulement si

$$U \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

2. (b) Calculer la probabilité $q(\lambda)$ que le joueur gagne.
2. (c) Montrer que, quand λ tend vers 0 par valeurs strictement positives, $q(\lambda)$ a une limite que l'on déterminera.

3. On suppose dans cette question, pour simplifier, que $\lambda = 1$.

3. (a) On admet les valeurs particulières suivantes :

$$E(X^2) = \frac{3}{5}, \quad E(Y^2) = \frac{2}{5}, \quad E(XY) = \frac{1}{5}.$$

3. (b) Calculer, pour toute valeur du réel a , la variance de la variable aléatoire

$$Z = X - aY.$$

3. (c) Montrer qu'il existe une valeur de a , que l'on déterminera, pour laquelle la variance de Z est minimale.