



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1995

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE I

1. (a) On multiplie la matrice par le vecteur de coordonnées $(-2, 1, 2)$:

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 6 \\ -12 + 7 + 4 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\phi(-2e_1 + e_2 + 2e_3) = 2e_1 - e_2 - 2e_3$. Le vecteur non nul $v_1 = (-2, 1, 2)$ est donc propre pour la valeur propre -1 .

1. (b) Pour $v = (x, y, z)$, la condition $Av = 0$ équivaut au système

$$\begin{cases} -4x - 6y = 0, \\ 6x + 7y + 2z = 0, \\ 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

La première équation impose $x = -3y/2$ et la troisième impose $z = y$. La deuxième devient alors $-9y + 7y + 2y = 0$, donc n'ajoute aucune condition. En posant $y = 2t$, on obtient $v = t(-3, 2, 2)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\text{Ker } \phi = \text{Vect}((-3, 2, 2))$. En particulier, 0 est une valeur propre de A , de vecteur propre $v_2 = (-3, 2, 2)$.

1. (c) On cherche les solutions de $Av = 2v$. Ce système s'écrit

$$\begin{cases} -6x - 6y = 0, \\ 6x + 5y + 2z = 0, \\ 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

Les première et troisième équations donnent $x = -y$ et $y = 2z$, donc $x = -2z$. La deuxième équation est alors $-12z + 10z + 2z = 0$. Toutes les solutions sont donc les vecteurs $z(-2, 2, 1)$.

Le vecteur $v_3 = (-2, 2, 1)$ est non nul. Par conséquent, 2 est une valeur propre et son sous-espace propre est $E_2 = \text{Vect}((-2, 2, 1))$.

1. (d) Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont des vecteurs propres non nuls associés aux valeurs propres réelles distinctes $-1, 0$ et 2 . Le théorème d'indépendance des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes assure que cette famille est libre. Elle contient trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: c'est donc une base.

Il existe ainsi une base de vecteurs propres de A , donc A est diagonalisable. Plus précisément, avec

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a $AQ = QD$, puis $Q^{-1}AQ = D$.

La justification de l'inversibilité de Q repose sur la base précédente et ne nécessite aucun déterminant.

1. (e) Puisque $A = QDQ^{-1}$, les produits successifs donnent $A^n = QD^nQ^{-1}$. Comme $n \geq 1$,

$$D^n = \text{diag}((-1)^n, 0, 2^n).$$

Les valeurs propres de A^n sont donc $(-1)^n, 0$ et 2^n . Elles sont deux à deux distinctes : la première vaut -1 ou 1 , la deuxième est nulle et la troisième est au moins égale à 2 .

En outre, les trois sous-espaces propres de A^n sont exactement les droites engendrées respectivement par v_1, v_2 et v_3 . En effet, dans cette base, la résolution de $D^n w = \mu w$ laisse une seule coordonnée libre lorsque μ est l'une de ces trois valeurs.

2. (a) Si $X^n = A^n$, l'associativité de la multiplication matricielle donne

$$XA^n = XX^n = X^{n+1} = X^nX = A^nX.$$

Toute solution de (*) commute donc avec A^n .

2. (b) Méthode 1 — Conservation des droites propres

Soit f_j un vecteur de la base considérée, associé à une valeur propre λ_j de A . Alors

$A^n f_j = \lambda_j^n f_j$. Par la commutation obtenue en 2. (a),

$$A^n(Xf_j) = X(A^n f_j) = \lambda_j^n Xf_j.$$

Ainsi Xf_j appartient au sous-espace propre de A^n associé à λ_j^n , en incluant le vecteur nul. Ce sous-espace est la droite $\text{Vect}(f_j)$, d'après 1. (e). Il existe donc un réel μ_j tel que $Xf_j = \mu_j f_j$.

Puisque $f_j \neq 0$, c'est un vecteur propre de X , même si $\mu_j = 0$. La base (f_1, f_2, f_3) diagonalise donc aussi X .

Méthode 2 — Coefficients dans une base propre

Dans la base (f_1, f_2, f_3) , la matrice de A^n est une diagonale $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$ dont les coefficients diagonaux sont distincts. Si $B = (b_{ij})$ est celle de X , la relation de commutation s'écrit $BH = HB$. Son coefficient d'indices (i, j) donne

$$(h_j - h_i)b_{ij} = 0.$$

Lorsque $i \neq j$, $h_i \neq h_j$, donc $b_{ij} = 0$. La matrice B est diagonale, ce qui donne la même conclusion.

La première approche explique la stabilité des sous-espaces propres ; la seconde permet de reconnaître directement les matrices qui commutent avec une diagonale à coefficients distincts.

2. (c) On peut prendre la matrice Q de 1. (d), dont les colonnes sont v_1, v_2 et v_3 . Elle est inversible et

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui se vérifie en multipliant les deux matrices : les produits dans les deux sens donnent I_3 . On a

$$Q^{-1}AQ = \text{diag}(-1, 0, 2), \quad Q^{-1}XQ = \text{diag}(a, b, c)$$

pour certains réels a, b, c dépendant de X . Cette même matrice Q convient à toutes les solutions X .

3. (a) En passant dans la base des colonnes de Q , l'équation (*) équivaut à

$$a^n = (-1)^n, \quad b^n = 0, \quad c^n = 2^n.$$

Si n est impair, la fonction réelle $t \mapsto t^n$ est strictement croissante et donc injective. Les seules possibilités sont $a = -1, b = 0$ et $c = 2$. Par conséquent,

$$X = Q \text{diag}(-1, 0, 2)Q^{-1} = A.$$

Réciproquement, $X = A$ vérifie bien (*). Pour tout entier impair $n \geq 1$, l'unique solution réelle est donc A .

3. (b) Si n est pair, les équations scalaires donnent $a \in \{-1, 1\}, b = 0$ et $c \in \{-2, 2\}$. Les quatre solutions sont exactement

$$X_{\varepsilon, \eta} = Q \text{diag}(\varepsilon, 0, 2\eta)Q^{-1}, \quad (\varepsilon, \eta) \in \{-1, 1\}^2.$$

Une écriture explicite est

$$X_{\varepsilon, \eta} = \begin{pmatrix} -4\varepsilon - 8\eta & -2\varepsilon - 8\eta & -4\varepsilon - 4\eta \\ 2\varepsilon + 8\eta & \varepsilon + 8\eta & 2\varepsilon + 4\eta \\ 4\varepsilon + 4\eta & 2\varepsilon + 4\eta & 4\varepsilon + 2\eta \end{pmatrix}.$$

Chaque couple de signes donne une matrice différente, puisque la conjugaison par Q est injective. Réciproquement, pour ces matrices, les puissances des trois coefficients diagonaux valent 1, 0 et 2^n . On a donc $X_{\varepsilon, \eta}^n = A^n$, ce qui vérifie l'existence de chacune des quatre solutions.

EXERCICE II

1. (a) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable ; sa dérivée est

$$f'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}.$$

Elle est strictement positive pour $t > 1$. Il s'ensuit que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Le fait que $f'(1) = 0$ n'empêche pas la stricte croissance : sur tout intervalle non réduit à un point inclus dans $[1, +\infty[$, la dérivée est positive à l'intérieur, sauf éventuellement à l'extrémité 1.

1. (b) Si $t \in [n, n+1]$, la croissance de f entraîne $f(n) \leq f(t) \leq f(n+1)$. L'intégration sur un intervalle de longueur 1 donne

$$\frac{e^n}{n} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}.$$

Ces inégalités sont même strictes : sur l'intérieur de l'intervalle, $f(n) < f(t) < f(n+1)$ et les différences sont continues et strictement positives.

Notons $L_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[n, n+1]$, et $f(n) < L_n < f(n+1)$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne un

$u_n \in]n, n+1[$ tel que $f(u_n) = L_n$. La stricte croissance donne son unicité. En particulier, la suite est bien définie pour tout $n \geq 1$.

2. (a) Pour chaque entier k entre 0 et $p-1$ et pour $t \in [1 + k/p, 1 + (k+1)/p]$, la croissance de f donne

$$f(1 + k/p) \leq f(t) \leq f(1 + (k+1)/p).$$

On intègre sur cet intervalle, dont la longueur est $1/p$, puis on somme ces p encadrements. Par la relation de Chasles,

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(1 + k/p) \leq L_1 \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(1 + (k+1)/p).$$

La différence entre la somme de droite et celle de gauche est télescopique et vaut $(f(2) - f(1))/p$. En soustrayant la somme de gauche, on obtient exactement l'encadrement demandé.

Cette preuve repose sur l'ordre et sur l'additivité de l'intégrale sur des segments, sans utiliser de théorème général sur les sommes de Riemann.

2. (b) Posons

$$S_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(1 + k/p).$$

Pour $p = 100$, les rectangles de gauche donnent $S_{100} \simeq 3,0542507$. Comme $f(2) - f(1) = e^2/2 - e \simeq 0,9762462$, la question précédente fournit

$$3,0542 < L_1 < 3,0641.$$

Ainsi 3,1 est une valeur approchée de L_1 à 0,1 près; on peut même retenir 3,06 avec une erreur inférieure à 0,006.

Pour encadrer u_1 , on utilise la stricte croissance de f et les évaluations $f(1,5) \simeq 2,98779$ et $f(1,6) \simeq 3,09565$. Elles donnent

$$f(1,5) < L_1 < f(1,6),$$

puis $1,5 < u_1 < 1,6$. On peut donc retenir $u_1 \simeq 1,6$ à 0,1 près, ou 1,55 avec une erreur inférieure à 0,05.

Pour reproduire les calculs de rectangles, le code suivant additionne les hauteurs des rectangles, puis divise par leur nombre. La fonction `exp` du module `math` calcule l'exponentielle réelle. Ce calcul numérique illustre l'encadrement démontré en 2. (a).

Python

```
from math import exp

p = 100
total = 0.0
for k in range(p):
    t = 1 + k / p
    total = total + exp(t) / t
somme_gauche = total / p
erreur = (exp(2) / 2 - exp(1)) / p
print(somme_gauche, somme_gauche + erreur)
```

Ce code a été exécuté; les deux valeurs renvoyées sont environ 3,0542507023 et 3,0640131645.

3. (a) La question 1. (b) donne $n < u_n < n + 1$. Comme $n > 0$, on divise par n :

$$1 < \frac{u_n}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Le théorème d'encadrement entraîne $u_n/n \rightarrow 1$.

3. (b) Posons $J_n = \int_n^{n+1} e^t/t^2 dt$, tandis que $L_n = \int_n^{n+1} e^t/t dt$. Les deux intégrales sont strictement positives. Pour $t \in [n, n+1]$, on a $0 < 1/t \leq 1/n$, donc

$$0 < J_n \leq \frac{1}{n} L_n.$$

Il vient $0 < J_n/L_n \leq 1/n$, d'où $J_n/L_n \rightarrow 0$.

Méthode 1 — Intégration par parties imposée

Sur le segment $[n, n+1]$, les fonctions $t \mapsto 1/t$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 . L'intégration par parties donne

$$L_n = \left[\frac{e^t}{t} \right]_n^{n+1} + J_n = \frac{e^n}{n} \left(\frac{en}{n+1} - 1 \right) + J_n.$$

Pour tout $n \geq 1$, le terme $en/(n+1) - 1$ est strictement positif, puisque $en/(n+1) \geq e/2 > 1$. Ainsi $L_n - J_n > 0$ et $1 - J_n/L_n > 0$. En utilisant $L_n = e^{u_n}/u_n$, l'identité précédente devient

$$e^{u_n - n} = \frac{u_n}{n} \frac{en/(n+1) - 1}{1 - J_n/L_n}.$$

Les trois facteurs ont respectivement pour limites 1, $e - 1$ et 1 au dénominateur. Par les règles sur les limites, le membre de droite tend vers $e - 1 > 0$. La continuité du logarithme sur $]0, +\infty[$ entraîne alors

$$u_n - n = \ln(e^{u_n - n}) \longrightarrow \ln(e - 1).$$

Méthode 2 — Encadrement direct de l'intégrale

Sur $[n, n+1]$, on a $1/(n+1) \leq 1/t \leq 1/n$. En multipliant par $e^t > 0$ puis en intégrant,

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{n+1} \leq L_n \leq \frac{e^{n+1} - e^n}{n}.$$

On multiplie par $n/e^n > 0$:

$$\frac{n}{n+1}(e-1) \leq \frac{nL_n}{e^n} \leq e-1.$$

Le théorème d'encadrement donne $nL_n/e^n \rightarrow e-1$. Or $e^{u_n - n} = (u_n/n)(nL_n/e^n)$, et $u_n/n \rightarrow 1$. On conclut à nouveau par continuité du logarithme.

La première méthode relie la limite au quotient d'intégrales étudié ; la seconde isole directement le facteur $1/t$ et fournit un encadrement exploitable.

EXERCICE III

1. (a) Question adaptée au programme actuel.

Résultat admis dans cette version adaptée : pour tout $\lambda > 0$ et tout $T > 0$,

$$I(T) = y(T)e^{-\lambda T} - \lambda x(T)e^{-\lambda T} + \lambda - \lambda^2 I(T),$$

$$J(T) = -x(T)e^{-\lambda T} + 1 - \lambda y(T)e^{-\lambda T} - \lambda^2 J(T).$$

L'absolue convergence des deux intégrales correspondantes sur $[0, +\infty[$ est également admise, comme dans le sujet d'origine. Les bornes géométriques permettent d'ailleurs de la vérifier : $|x(u)e^{-\lambda u}| \leq e^{-\lambda u}$ et $|y(u)e^{-\lambda u}| \leq e^{-\lambda u}$, et l'intégrale de cette majorante positive vaut $1/\lambda < +\infty$.

Les deux identités particulières fournissent les valeurs des intégrales infinies dans la question suivante, sans demander l'étude de fonctions extérieures au référentiel.

1. (b) En regroupant les termes de la première identité,

$$(1 + \lambda^2)I(T) = \lambda + [y(T) - \lambda x(T)]e^{-\lambda T}.$$

Comme $|x(T)| \leq 1$ et $|y(T)| \leq 1$, le terme entre crochets multiplié par l'exponentielle a une valeur absolue majorée par $(1 + \lambda)e^{-\lambda T}$, qui tend vers 0 pour $\lambda > 0$ fixé. Ainsi

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} I(T) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

De même, la seconde identité donne

$$(1 + \lambda^2)J(T) = 1 - [x(T) + \lambda y(T)]e^{-\lambda T},$$

dont le dernier terme tend vers 0 par le même encadrement. Par conséquent,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J(T) = \frac{1}{1 + \lambda^2}.$$

Les divisions sont licites puisque $1 + \lambda^2 > 0$.

1. (c) Les variables X et Y sont bornées en valeur absolue par 1 ; elles admettent donc une espérance. Le théorème de transfert appliqué à la variable à densité U donne

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x(u) \lambda e^{-\lambda u} du = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y(u) \lambda e^{-\lambda u} du = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

L'absolue convergence nécessaire au transfert a été vérifiée en 1. (a). Ces égalités sont valables pour tout $\lambda > 0$.

2. (a) Question adaptée au programme actuel.

Résultat admis dans cette version adaptée : le joueur gagne exactement lorsque

$$U \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

Les intervalles correspondent aux positions gagnantes lors des tours successifs et sont deux à deux disjoints. Cette caractérisation particulière est la donnée utilisée pour calculer la probabilité en 2. (b).

2. (b) Pour $0 \leq a \leq b$, la loi exponentielle donne $P(a \leq U \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. La présence ou non des bornes ne change pas la probabilité, car une variable à densité ne prend chaque valeur fixée qu'avec probabilité nulle.

Par additivité sur les événements deux à deux incompatibles de 2. (a),

$$q(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda(\pi/6+2k\pi)} - e^{-\lambda(5\pi/6+2k\pi)} \right).$$

On factorise les termes positifs constants :

$$q(\lambda) = \left(e^{-\pi\lambda/6} - e^{-5\pi\lambda/6} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-2\pi\lambda})^k.$$

Puisque $\lambda > 0$, la raison $e^{-2\pi\lambda}$ appartient à $]0, 1[$. La série géométrique converge donc, et

$$q(\lambda) = \frac{e^{-\pi\lambda/6} - e^{-5\pi\lambda/6}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}.$$

Le dénominateur est strictement positif ; la formule est définie pour tout paramètre admissible.

2. (c) Posons $h(\lambda) = e^{-\pi\lambda/6} - e^{-5\pi\lambda/6}$ et $g(\lambda) = 1 - e^{-2\pi\lambda}$. Ces fonctions sont dérivables au voisinage de 0 et $h(0) = g(0) = 0$. Leurs dérivées en 0 valent

$$h'(0) = -\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}, \quad g'(0) = 2\pi.$$

Par définition de la dérivée, $h(\lambda)/\lambda \rightarrow 2\pi/3$ et $g(\lambda)/\lambda \rightarrow 2\pi$. Pour $\lambda > 0$, on écrit

$$q(\lambda) = \frac{h(\lambda)/\lambda}{g(\lambda)/\lambda}.$$

Le dénominateur tend vers $2\pi \neq 0$, donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = \frac{1}{3}.$$

Cette preuve emploie uniquement la dérivabilité de l'exponentielle et les règles usuelles de limites.

3. (a) Question adaptée au programme actuel.

Résultat admis dans cette version adaptée : lorsque $\lambda = 1$,

$$E(X^2) = \frac{3}{5}, \quad E(Y^2) = \frac{2}{5}, \quad E(XY) = \frac{1}{5}.$$

Ces moments existent puisque $|X| \leq 1$ et $|Y| \leq 1$, donc X^2 , Y^2 et XY sont bornés. On vérifie la cohérence des deux premiers moments avec $X^2 + Y^2 = 1$: leur somme vaut bien 1.

Ces trois valeurs particulières et les espérances calculées en 1. (c) sont les seules données nécessaires au calcul de la variance demandé ensuite.

3. (b) Lorsque $\lambda = 1$, la question 1. (c) donne $E(X) = E(Y) = 1/2$. Par les formules de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}, \quad V(Y) = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20},$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}.$$

Pour tout réel a , la variable $Z = X - aY$ admet un moment d'ordre deux, puisqu'elle est bornée par $1 + |a|$ en valeur absolue. La formule de variance d'une combinaison linéaire donne

$$V(Z) = V(X) + a^2 V(Y) - 2a \text{Cov}(X, Y) = \frac{3a^2 + 2a + 7}{20}.$$

Il n'est pas nécessaire de supposer X et Y indépendantes. Elles ne le sont d'ailleurs pas puisque leur covariance est non nulle.

On peut aussi vérifier le calcul directement :

$$E(Z^2) = \frac{3}{5} - \frac{2a}{5} + \frac{2a^2}{5}, \quad E(Z) = \frac{1-a}{2},$$

puis $V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$, ce qui redonne la même expression.

3. (c) Méthode 1 — Mise sous forme canonique

On complète le carré :

$$V(Z) = \frac{3}{20} \left(a + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3}.$$

Le carré est positif ou nul et son coefficient est strictement positif. Il s'annule uniquement pour $a = -1/3$. La variance admet donc un minimum global unique, égal à $1/3$, atteint pour $a = -1/3$.

Méthode 2 — Dérivation de la fonction variance

La fonction $v : a \mapsto (3a^2 + 2a + 7)/20$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$v'(a) = \frac{3a + 1}{10}.$$

Sa dérivée est négative pour $a < -1/3$, nulle en $-1/3$ et positive pour $a > -1/3$. Elle décroît donc jusqu'à $-1/3$ puis croît au-delà. Ce point est l'unique minimum global, et la substitution donne $v(-1/3) = 1/3$.

La forme canonique fournit simultanément la valeur minimale et le cas d'égalité ; la dérivation se réutilise pour des fonctions variance qui ne sont pas des polynômes de degré deux.

Relevé des adaptations

Exercice II, 3. (a) et 3. (b) : les indices de limite imprimés $x \rightarrow +\infty$ sont rectifiés en $n \rightarrow +\infty$, puisque les expressions portent sur les suites indexées par n . La convention d'indexation de (u_n) est explicitée par $n \geq 1$, conformément à sa définition.

Exercice III, préambule : les coordonnées de la marque sont définies géométriquement par les fonctions réelles continues x et y , avec les bornes et l'identité de cercle nécessaires. Aucune connaissance sur des fonctions hors programme n'est requise.

Exercice III, 1. (a) : la demande initiale de démonstration par intégrations par parties est remplacée par l'admission des deux identités particulières pour $I(T)$ et $J(T)$, pour $\lambda > 0$ et $T > 0$. Leurs conséquences réelles sont démontrées en 1. (b) et 1. (c).

Exercice III, 2. (a) : l'ensemble particulier des angles gagnants est donné et admis, afin de conserver le calcul de probabilité de 2. (b) et l'étude de limite de 2. (c).

Exercice III, 3. (a) : les trois moments particuliers pour $\lambda = 1$ sont admis. Leur utilisation permet de conserver intégralement les questions de variance et de minimisation de 3. (b) et 3. (c).