



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1994

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

(a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0, 1]$.

(b) Étudier le sens de variation de f_n .

2. Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0, 1]$ tel que

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt.$$

Donner la valeur de c_0 .

3. On considère la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ des nombres définis à la question précédente ; montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $[0, 1]$.

4. (a) Montrer que, pour tout nombre réel r fixé de $]0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty.$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1.$$

(c) En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 2

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on désigne par Γ la partie de $M_3(\mathbb{R})$ constituée des matrices dont les trois colonnes sont égales.

1. Soit $T = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$ un élément de Γ . On pose $s = a + b + c$ et on note u

l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice T dans la base (e_1, e_2, e_3) .

(a) On suppose dans cette question que $s \neq 0$.

i. Montrer que les vecteurs

$$f_1 = e_1 - e_2, \quad f_2 = e_2 - e_3, \quad f_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Déterminer la matrice de u dans cette base.

iii. En déduire les valeurs propres de T .

(b) On suppose dans cette question que $s = 0$.

i. Calculer T^2 .

ii. En déduire que T admet 0 pour unique valeur propre.

2. Soit de plus $T' = \begin{pmatrix} a' & a' & a' \\ b' & b' & b' \\ c' & c' & c' \end{pmatrix}$ un autre élément de Γ et $s' = a' + b' + c'$.

(a) Exprimer le produit TT' en fonction de T .

(b) À quelles conditions les matrices TT' et T ont-elles les mêmes valeurs propres ? On pourra distinguer les cas $s = 0$ et $s \neq 0$.

3. Soit M un élément de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = T + I$, où T appartient à Γ et I est la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que T n'est pas la matrice nulle.

(a) Pour tout couple (α, β) de nombres réels, exprimer le produit $M(\alpha I + \beta M)$ comme combinaison linéaire de I et M .

(b) Trouver les valeurs de s pour lesquelles M possède une matrice inverse de la forme $\alpha I + \beta M$ et calculer cette inverse.

Pour les autres valeurs de s , la matrice M est-elle inversible ?

(c) Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

(d) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de N .

Exercice 3

1. (a) Rappeler la valeur de la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$$

et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$.

(b) Déterminer la constante k telle que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

2. Un barrage alimente l'irrigation d'une région donnée. La quantité d'eau de pluie tombée en un mois en amont du barrage est une variable aléatoire X qui suit une loi de densité f . On suppose que, dans un système d'unités convenablement choisi, la quantité d'eau fournie par le barrage est égale à la variable aléatoire

$$Q = 1 - ae^{-bX^2},$$

où b est un nombre strictement positif et a un nombre tel que $0 < a < 1$.

(a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .

(b) Étudier la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - ae^{-bx^2}$.

Montrer qu'elle admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

Expliciter la valeur $g^{-1}(y)$ en fonction de y .

(c) Calculer l'espérance $E(Q)$ et la variance $V(Q)$ de la variable Q en fonction de a et b .

3. Exprimer la probabilité p que Q soit supérieure à une valeur fixée α à l'aide de la fonction de répartition Φ d'une loi normale centrée réduite, de la fonction g^{-1} et de α .