



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1994

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \mapsto e^{nt^2}$ et $t \mapsto e^{-nt^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Elles admettent donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation d'une intégrale à borne variable donne, sur $]0, 1[$,

$$f'_n(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2}.$$

La même expression définit la dérivée du prolongement de f_n à $\mathbb{R}$ donné par la même formule intégrale. En particulier, f_n est dérivable sur $[0, 1]$, avec dérivées unilatérales aux extrémités.

- (b) Pour tout $x \in [0, 1]$, les deux termes de $f'_n(x)$ sont strictement positifs. Ainsi $f'_n(x) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$.

2. On cherche les zéros de f_n . Cette fonction est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, et

$$f_n(0) = - \int_0^1 e^{-nt^2} dt < 0, \quad f_n(1) = \int_0^1 e^{nt^2} dt > 0.$$

Ces intégrales sont strictement positives parce que leurs intégrandes sont continues et strictement positives sur un segment de longueur non nulle. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un zéro ; la stricte croissance assure son unicité. Il existe donc un unique $c_n \in]0, 1[$ vérifiant l'égalité demandée.

Pour $n = 0$, les intégrandes valent 1. L'équation devient $c_0 = 1 - c_0$, d'où

$$c_0 = \frac{1}{2}.$$

3. Question adaptée au programme actuel. Rectification de l'énoncé : le PDF demande de prouver que la suite est croissante ; les fonctions qu'il définit conduisent au sens de variation opposé.

Comparons les fonctions à indices consécutifs. Pour $x \in [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (e^{(n+1)t^2} - e^{nt^2}) dt + \int_x^1 (e^{-nt^2} - e^{-(n+1)t^2}) dt.$$

Les deux intégrandes sont positives ou nulles et strictement positives pour $t > 0$. Au point $x = c_n \in]0, 1[$, la première intégrale, par exemple, est strictement positive. Ainsi

$$f_{n+1}(c_n) > f_n(c_n) = 0.$$

Or f_{n+1} est strictement croissante et s'annule en c_{n+1} . L'inégalité précédente impose

$$0 < c_{n+1} < c_n.$$

La suite est donc strictement décroissante et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ . Puisque $0 < c_n \leq c_0 = 1/2$, le passage à la limite donne $\ell \in [0, 1/2]$, donc en particulier $\ell \in [0, 1]$.

4. (a) Question adaptée au programme actuel. Le domaine est rectifié en $r \in]0, 1]$: pour $r = 0$, l'intégrale est identiquement nulle et la conclusion du PDF est fausse.

Fixons donc $r \in]0, 1]$. Pour $t \in [r/2, r]$, on a $t^2 \geq r^2/4$. Par positivité puis croissance de l'intégrale,

$$\int_0^r e^{nt^2} dt \geq \int_{r/2}^r e^{nt^2} dt \geq \frac{r}{2} e^{nr^2/4}.$$

Comme $r^2/4 > 0$, le membre de droite tend vers $+\infty$. La minoration prouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty.$$

La minoration par 1 sur tout le segment n'aurait donné qu'une borne constante ; le choix du sous-segment éloigné de 0 permet d'obtenir la divergence.

- (b) Pour $n \geq 0$ et $t \in [c_n, 1]$, on a $0 < e^{-nt^2} \leq 1$. Par comparaison,

$$0 \leq \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_{c_n}^1 1 dt = 1 - c_n \leq 1.$$

(c) Supposons $\ell > 0$. La suite étant décroissante vers ℓ , on a $c_n \geq \ell$ pour tout n . Les intégrandes étant positives, la définition de c_n et la question précédente donnent

$$\int_0^\ell e^{nt^2} dt \leq \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1.$$

Mais la question 4.(a), appliquée au nombre fixé $r = \ell \in]0, 1]$, affirme que le membre de gauche tend vers $+\infty$. Cette contradiction exclut $\ell > 0$. Comme $\ell \geq 0$, on conclut

$$\ell = 0.$$

Exercice 2

Pour un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, le produit matriciel donne la formule utile

$$u(v) = (x + y + z)f_3, \quad f_3 = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

Cette formule découle de l'égalité des colonnes de T et sera utilisée dans les différentes questions.

1. (a) i. Méthode 1 — Liberté de la famille.

Supposons $s \neq 0$ et considérons une relation

$$\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0.$$

Les sommes des coordonnées de f_1 et f_2 valent 0, celle de f_3 vaut s . En sommant les trois coordonnées de la relation, il vient $\nu s = 0$, donc $\nu = 0$. La relation restante s'écrit

$$\lambda e_1 + (-\lambda + \mu)e_2 - \mu e_3 = 0.$$

La base canonique étant libre, la première et la troisième coordonnées donnent $\lambda = \mu = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Elle contient trois vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 : c'est une base.

Méthode 2 — Décomposition explicite.

Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Si $v = \lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3$, la somme des coordonnées impose $\nu = (x + y + z)/s$. Définissons ce nombre ν , puis

$$\lambda = x - a\nu, \quad \mu = c\nu - z.$$

Le vecteur $\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3$ a pour coordonnées

$$(\lambda + a\nu, -\lambda + \mu + b\nu, -\mu + c\nu) = (x, -x - z + s\nu, z) = (x, y, z).$$

Tout vecteur possède donc cette décomposition, et les trois coefficients sont imposés par les calculs précédents : elle est unique. Cela prouve à nouveau que la famille est une base. La première méthode est plus rapide ; la seconde fournit directement les coordonnées dans la nouvelle base.

ii. Les sommes des coordonnées de f_1 et f_2 sont nulles. La formule initiale donne donc $u(f_1) = u(f_2) = 0$. Pour f_3 , la somme des coordonnées vaut s , donc $u(f_3) = sf_3$.

Les colonnes de la matrice dans la nouvelle base sont les coordonnées de ces images. Ainsi

$$\text{Mat}_{(f_1, f_2, f_3)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}.$$

iii. La matrice de la question précédente est diagonale et semblable à T . Ses valeurs propres, donc celles de T , sont 0 et s . Comme $s \neq 0$, elles sont distinctes ; leurs espaces propres sont respectivement

$$E_0(T) = \text{Vect}(f_1, f_2), \quad E_s(T) = \text{Vect}(f_3).$$

En particulier, $\text{Sp}(T) = \{0, s\}$.

(b) i. Le coefficient situé à la ligne i et à une colonne quelconque de T^2 est le coefficient de la ligne i de la colonne commune de T , multiplié par $a + b + c$. Par produit matriciel,

$$T^2 = \begin{pmatrix} as & as & as \\ bs & bs & bs \\ cs & cs & cs \end{pmatrix} = sT.$$

Dans le cas présent $s = 0$, d'où $T^2 = 0$.

ii. Soit λ une valeur propre de T et $v \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $Tv = \lambda v$, et en appliquant encore T ,

$$0 = T^2v = \lambda^2v.$$

Puisque $v \neq 0$, on obtient $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$. Il reste à vérifier que 0 est bien une valeur propre : le vecteur non nul $e_1 - e_2$ a une somme de coordonnées nulle, donc $T(e_1 - e_2) = 0$. Ainsi $\text{Sp}(T) = \{0\}$, y compris lorsque $T = 0$.

2. (a) Chaque colonne de T' est le vecteur $a'e_1 + b'e_2 + c'e_3$, dont la somme des coordonnées vaut s' . Son image par T vaut donc $s'f_3$. Les trois colonnes du produit TT' sont celles de $s'T$, d'où

$$TT' = s'T.$$

(b) La question 1 montre, pour toute matrice de Γ dont la somme des coefficients de la colonne commune vaut h , que son spectre est $\{0\}$ si $h = 0$ et $\{0, h\}$ si $h \neq 0$.

Or $TT' = s'T$ appartient à Γ et la somme de sa colonne commune vaut ss' . On distingue donc deux cas.

Si $s = 0$, les spectres de T et de TT' valent tous deux $\{0\}$, quelle que soit la valeur de s' .

Si $s \neq 0$, le spectre de T est $\{0, s\}$. Pour obtenir exactement ce même ensemble, il faut et

il suffit que la valeur non nulle ss' soit égale à s , c'est-à-dire $s' = 1$. Le choix $s' = 0$ ne convient pas, car le spectre du produit se réduirait à $\{0\}$.

La condition cherchée est donc

$$s = 0 \quad \text{ou} \quad s' = 1.$$

3. (a) L'identité $T^2 = sT$ a été établie par un calcul valable pour tout s . Comme $M = T + I$, on a

$$M^2 = T^2 + 2T + I = (s + 2)T + I = (s + 2)M - (s + 1)I.$$

Par distributivité du produit matriciel,

$$M(\alpha I + \beta M) = \alpha M + \beta M^2 = -\beta(s + 1)I + (\alpha + \beta(s + 2))M.$$

(b) Justifions d'abord que I et M sont linéairement indépendantes. Une relation $rI + tM = 0$ avec $t \neq 0$ ferait de M , puis de $T = M - I$, une matrice scalaire. Or une matrice scalaire ayant trois colonnes égales est nécessairement nulle : la comparaison de ses deux premières colonnes impose son coefficient diagonal nul. Cela contredirait l'hypothèse $T \neq 0$. Il faut donc $t = 0$, puis $r = 0$.

Ainsi le produit calculé en 3.(a) est égal à I si et seulement si

$$-\beta(s + 1) = 1, \quad \alpha + \beta(s + 2) = 0.$$

Si $s \neq -1$, ce système admet l'unique solution

$$\beta = -\frac{1}{s + 1}, \quad \alpha = \frac{s + 2}{s + 1}.$$

La matrice $\alpha I + \beta M$ commute avec M , puisqu'elle est une combinaison linéaire de I et de M . Le produit dans l'autre sens est donc lui aussi égal à I . On a bien

$$M^{-1} = \frac{(s + 2)I - M}{s + 1} = I - \frac{T}{s + 1} \quad (s \neq -1).$$

Si $s = -1$, aucune solution du système n'existe. Pour montrer que M n'admet pas non plus d'inverse d'une autre forme, prenons le vecteur $f_3 = (a, b, c)$. Ce vecteur est non nul puisque la somme de ses coordonnées vaut -1 . La formule initiale donne

$Tf_3 = sf_3 = -f_3$, donc $Mf_3 = 0$. Le noyau de M contient un vecteur non nul : M n'est pas inversible.

Finalement, M est inversible si et seulement si $s \neq -1$, et son inverse a alors la forme demandée.

(c) Méthode 1 — Utilisation de la structure précédente.

On écrit $N = I + T_0$, avec

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Cette matrice est non nulle et la somme de sa colonne commune vaut $s_0 = 1 + 0 - 1 = 0$. Puisque $s_0 \neq -1$, la question précédente assure l'inversibilité de N et donne

$$N^{-1} = I - T_0 = 2I - N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Résolution d'un système.

Pour $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ donné, l'équation $NX = Y$ s'écrit

$$2x_1 + x_2 + x_3 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad -x_1 - x_2 = y_3.$$

La deuxième équation donne $x_2 = y_2$, puis la troisième donne $x_1 = -y_2 - y_3$. La première impose alors $x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3$. Il existe donc une unique solution pour tout Y , à savoir

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y.$$

Cela prouve l'inversibilité et retrouve le même inverse. La première méthode exploite les questions précédentes ; la seconde donne une vérification indépendante par les systèmes linéaires.

(d) Comme $T_0^2 = 0$, si $Nv = \lambda v$ avec $v \neq 0$, alors $T_0 v = (\lambda - 1)v$ et

$$0 = T_0^2 v = (\lambda - 1)^2 v.$$

Donc $\lambda = 1$. Réciproquement, $Nv = v$ équivaut à $T_0 v = 0$. Pour $v = {}^t(x, y, z)$,

$$T_0 v = (x + y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'espace propre associé à 1 est

$$E_1(N) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1)).$$

Les deux vecteurs affichés sont indépendants, et toute solution vérifie $z = -x - y$, donc appartient à ce plan. La seule valeur propre est 1 ; ses vecteurs propres sont exactement les vecteurs non nuls de ce plan.

Exercice 3

1. (a) La fonction $x \mapsto (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ est la densité de la loi normale centrée réduite.

Son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut donc 1 :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1.$$

La fonction intégrée est paire ; ses deux intégrales sur les demi-droites sont égales et convergentes. On en déduit

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(b) Question adaptée au programme actuel. Rectification d'une coquille de variable : le PDF affiche $e^{-t^2/2}$ dans la définition de $f(x)$; il faut lire $e^{-x^2/2}$.

La fonction proposée est continue sur chacune des deux demi-droites ouvertes et possède des limites finies à gauche et à droite de 0. Pour qu'elle soit une densité, il faut qu'elle soit positive ou nulle et d'intégrale totale égale à 1. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = k \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = k\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La condition de normalisation impose donc $k = \sqrt{2/\pi}$, qui est strictement positif. Avec cette valeur, la positivité et la normalisation sont bien vérifiées. L'unique constante convenable est

$$k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

2. (a) Méthode 1 — Intégrales de moments.

La densité s'annule sur $] -\infty, 0[$. Pour $A > 0$, une primitive explicite donne

$$\int_0^A x e^{-x^2/2} dx = 1 - e^{-A^2/2}.$$

Le membre de droite tend vers 1. L'intégrande étant positive sur $[0, +\infty[$, cela établit aussi la convergence absolue nécessaire à l'existence de l'espérance. Par conséquent,

$$E(X) = k \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx = k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Pour le second moment, on effectue une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, avec $u(x) = x$ et $v'(x) = x e^{-x^2/2}$, donc $v(x) = -e^{-x^2/2}$. On obtient

$$\int_0^A x^2 e^{-x^2/2} dx = -A e^{-A^2/2} + \int_0^A e^{-x^2/2} dx.$$

Par croissance comparée, $Ae^{-A^2/2} \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow +\infty$. L'intégrale restante converge vers $\sqrt{\pi/2}$ d'après 1.(a). Le second moment existe donc et vaut

$$E(X^2) = k\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

La formule de Koenig-Huygens donne finalement

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Méthode 2 — Identification à la valeur absolue d'une normale.

Soit Z de loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ . Pour $x < 0$, $P(|Z| \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$, l'absence d'atomes et la symétrie de la loi normale donnent

$$P(|Z| \leq x) = P(-x \leq Z \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée pour $x > 0$ est $2(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2} = ke^{-x^2/2}$. Ainsi $|Z|$ et X ont la même loi. En particulier, X^2 et Z^2 ont la même loi, d'où

$$E(X^2) = E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = 1.$$

Pour le premier moment, le transfert appliqué à $|Z|$ donne, grâce à la parité,

$$E(|Z|) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

l'intégrale convergeant vers 1 par la primitive calculée ci-dessus. On retrouve $E(X) = \sqrt{2/\pi}$ et $V(X) = 1 - 2/\pi$. Cette seconde méthode explique la forme de la densité et utilise le second moment connu de la loi normale; la première calcule directement les deux moments.

(b) Question adaptée au programme actuel. On précise le domaine $[0, +\infty[$, qui correspond aux valeurs de X . Sur $\mathbb{R}$ entier, la formule définirait une fonction paire, qui ne serait pas injective.

La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable, avec

$$g'(x) = 2abxe^{-bx^2}.$$

Puisque $a > 0$ et $b > 0$, cette dérivée est strictement positive pour $x > 0$. La fonction est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Ses valeurs aux bornes sont

$$g(0) = 1 - a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

De plus, $g(x) < 1$ pour tout x fini. Le théorème de la bijection montre que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1 - a, 1[$. Sa réciproque est donc définie exactement sur $[1 - a, 1[$.

Pour $y \in [1 - a, 1[$, résoudre $y = 1 - ae^{-bx^2}$ donne successivement

$$e^{-bx^2} = \frac{1-y}{a}, \quad -bx^2 = \ln\left(\frac{1-y}{a}\right).$$

Le quotient appartient à $]0, 1]$, donc son logarithme est défini et négatif ou nul. Comme $x \geq 0$, l'unique solution est

$$g^{-1}(y) = \sqrt{-\frac{1}{b} \ln\left(\frac{1-y}{a}\right)} \quad (y \in [1 - a, 1[).$$

(c) On a $X \geq 0$ presque sûrement et $0 < e^{-bX^2} \leq 1$. Ainsi $1 - a \leq Q < 1$ presque sûrement : Q et Q^2 sont bornées, et leurs espérances existent.

Posons $R = e^{-bX^2}$. Pour $j = 1$ ou $j = 2$, le transfert est applicable : la fonction $x \mapsto e^{-jbX^2}$ est continue et bornée sur le support de X . Il donne

$$E(R^j) = k \int_0^{+\infty} e^{-(1+2jb)x^2/2} dx.$$

Calculons cette intégrale par un changement de variable affine, d'abord sur $[0, A]$. Avec $u = \sqrt{1+2jb}x$, dont le coefficient est strictement positif,

$$\int_0^A e^{-(1+2jb)x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{1+2jb}} \int_0^{A\sqrt{1+2jb}} e^{-u^2/2} du.$$

Lorsque $A \rightarrow +\infty$, l'intégrale de droite converge d'après 1.(a). En passant à la limite puis en utilisant $k\sqrt{\pi/2} = 1$, on obtient

$$E(R) = \frac{1}{\sqrt{1+2b}}, \quad E(R^2) = \frac{1}{\sqrt{1+4b}}.$$

Comme $Q = 1 - aR$, la linéarité de l'espérance donne

$$E(Q) = 1 - \frac{a}{\sqrt{1+2b}}.$$

La variance d'une transformation affine et la formule de Koenig-Huygens donnent

$$V(Q) = a^2 V(R) = a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+4b}} - \frac{1}{1+2b} \right).$$

L'expression est bien positive : pour $b > 0$, on a $(1+2b)^2 = 1+4b+4b^2 > 1+4b$, donc $1+2b > \sqrt{1+4b}$. Cela confirme la cohérence du résultat avec une variance strictement positive.

3. La formule demandée doit distinguer les seuils pour lesquels $g^{-1}(\alpha)$ est défini.

Comme $Q \in [1-a, 1[$ presque sûrement, on a $P(Q > \alpha) = 1$ si $\alpha < 1-a$, et $P(Q > \alpha) = 0$ si $\alpha \geq 1$.

Au seuil $\alpha = 1-a$, l'égalité $Q = 1-a$ équivaut à $X = 0$. Une variable à densité ne prend aucune valeur fixée avec une probabilité positive ; ainsi $P(Q > 1-a) = 1$ également.

Pour $1-a < \alpha < 1$, la stricte croissance de g sur le support de X donne

$$P(Q > \alpha) = P(X > g^{-1}(\alpha)).$$

Pour tout $t \geq 0$, la densité de X vaut deux fois celle de la normale centrée réduite sur $[0, +\infty[$. Par intégration,

$$P(X > t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 2(1 - \Phi(t)).$$

On conclut donc

$$p = P(Q > \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1-a, \\ 2(1 - \Phi(g^{-1}(\alpha))) & \text{si } 1-a < \alpha < 1, \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Dans le cas intermédiaire, on peut remplacer $g^{-1}(\alpha)$ par $\sqrt{-b^{-1} \ln((1-\alpha)/a)}$. La formule centrale est aussi valable en $\alpha = 1-a$, car $g^{-1}(1-a) = 0$ et $\Phi(0) = 1/2$; elle n'est pas définie en $\alpha = 1$.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 3 : remplacement de « croissante » par « décroissante ». L'énoncé original contredit les fonctions définies ; la preuve établit la stricte décroissance. La conclusion de convergence et toutes les dépendances sont conservées.

Exercice 1, question 4.(a) : remplacement de $r \in [0, 1]$ par $r \in]0, 1]$, car l'intégrale vaut 0 pour $r = 0$. La divergence est établie sans échange de limite et d'intégrale.

Exercice 3, question 1.(b) : rectification de la variable dans l'exponentielle de la densité : x^2 remplace le t^2 isolé du PDF.

Exercice 3, question 2.(b) : explicitation du domaine $[0, +\infty[$ de g , nécessaire à la réciproque et cohérent avec le support de X .
