



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1993

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE I

On note E l'ensemble des fonctions numériques définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des éléments f de E tels que :

$$f'' - 3f' + 2f = 0.$$

Soit F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant en outre la relation $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F et F_0 contiennent la fonction nulle et sont stables par combinaison linéaire : si h, k appartiennent à l'un de ces ensembles et si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $ah + bk$ appartient au même ensemble.

2. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f_1(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{2x}.$$

Montrer que f_1 et f_2 sont des éléments de F et que la relation $a_1 f_1 + a_2 f_2 = 0$ entraîne $a_1 = a_2 = 0$ pour tous réels a_1, a_2 .

3. Soit f un élément de F .

(a) Montrer qu'il existe un couple (a_1, a_2) et un seul de nombres réels tel que $f - a_1 f_1 - a_2 f_2$ appartienne à F_0 .

(b) Soit g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$g_1(x) = e^{-x}(f'(x) - 2f(x)) \quad \text{et} \quad g_2(x) = e^{-2x}(f'(x) - f(x)).$$

Montrer que ces fonctions sont constantes.

(c) En appliquant le résultat précédent, montrer que si f appartient à F_0 , alors $f = 0$.

4. Soit Φ l'application de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par la relation :

$$\Phi(f) = (f(0), f'(0)).$$

Montrer que Φ est bijective et préserve les combinaisons linéaires. En déduire que F s'identifie à un espace vectoriel réel de dimension 2 et que Φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0 = 1$ et par les relations de récurrence, valables pour tout entier naturel n :

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}), \quad u_{2n+2} = g(u_{2n+1}).$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n \geq 0}$ et montrer que pour tout entier naturel n , $u_{2n+1} > 1$ et $u_{2n+2} > 0$.
2. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$ ont une solution commune et une seule. On note α cette solution.

3. Montrer que la fonction $\varphi = f \circ g$ est définie et décroissante sur $]1, +\infty[$.

Montrer que la fonction $\psi = \varphi \circ \varphi$ est définie et croissante sur $]1, +\infty[$. Calculer $\psi(\alpha)$.

4. Montrer que, pour tout élément x de $]1, \alpha[$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1}} > x.$$

5. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_{4n+1}$.

(a) Montrer que $v_0 < \alpha$.

- (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \psi(v_n)$.
- (c) À l'aide du résultat de la question 4, montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante et que, pour tout entier naturel n ,
- $$1 < v_n \leq \alpha.$$
- (d) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente et trouver sa limite.
6. On considère les trois suites $(u_{4n+2})_{n \geq 0}$, $(u_{4n+3})_{n \geq 0}$ et $(u_{4n+4})_{n \geq 0}$. Montrer que ces suites s'expriment simplement à l'aide de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$. En déduire qu'elles sont convergentes et trouver leurs limites.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et trouver sa limite.

EXERCICE 3

L'objet de cet exercice est l'étude d'un exemple de discrétisation d'une variable aléatoire.

Pour tout réel x , on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x . On note $\{x\}$ la partie décimale de x , définie par :

$$\{x\} = x - [x].$$

A.

1. Représenter graphiquement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto [x], \quad x \mapsto \{x\}, \quad x \mapsto [2x] \quad \text{et} \quad x \mapsto \{2x\}.$$

2. Montrer que, pour tout réel x :

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right].$$

B.

Soit X une variable aléatoire positive admettant pour densité une fonction f continue sur $[0, +\infty[$. On note F la fonction de répartition de X .

1. Pour tout entier naturel non nul n , exprimer à l'aide de f la densité de la variable aléatoire nX .
2. Pour tout entier naturel k , exprimer à l'aide de f ou de F la probabilité que $[X] = k$ (c'est-à-dire que la partie entière de X soit égale à k).
3. Pour tout entier naturel non nul n , exprimer à l'aide de f ou de F la loi de la variable aléatoire à valeurs entières $[nX]$.

C.

Soit λ un réel strictement positif. On suppose maintenant que la fonction f est définie par les relations :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition et l'espérance de X .
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $[X]$. De quelle loi s'agit-il ? Calculer l'espérance de $[X]$.
3. Pour tout entier naturel non nul n , on considère la variable aléatoire réelle discrète $Y_n = \frac{1}{n}[nX]$.

Trouver l'espérance m_n de Y_n . Montrer que la suite $(m_n)_{n \geq 1}$ est convergente et trouver sa limite.

4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle $\{X\}$. En déduire une densité de $\{X\}$ et calculer son espérance.