



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1993

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE I

1. Question adaptée au programme actuel.

Il s'agit de vérifier directement la stabilité des ensembles de solutions, sans étudier un espace vectoriel de dimension infinie. La fonction nulle est de classe C^2 , vérifie l'équation différentielle et les deux conditions initiales; elle appartient donc à F et F_0 .

Si $h, k \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $ah + bk$ est de classe C^2 et

$$(ah + bk)'' - 3(ah + bk)' + 2(ah + bk) = a(h'' - 3h' + 2h) + b(k'' - 3k' + 2k) = 0.$$

Ainsi $ah + bk \in F$. Si, de plus, $h, k \in F_0$, alors

$$(ah + bk)(0) = ah(0) + bk(0) = 0, \quad (ah + bk)'(0) = ah'(0) + bk'(0) = 0.$$

Donc $ah + bk \in F_0$. Les deux ensembles ont bien les stabilités demandées.

2. Question adaptée au programme actuel : l'indépendance est formulée comme une propriété de deux fonctions, avant l'identification à un espace de dimension finie.

Les fonctions exponentielles considérées sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et

$$f_1'' - 3f_1' + 2f_1 = (1 - 3 + 2)e^x = 0, \quad f_2'' - 3f_2' + 2f_2 = (4 - 6 + 2)e^{2x} = 0.$$

Elles appartiennent donc à F .

Supposons que $a_1 e^x + a_2 e^{2x} = 0$ pour tout réel x . L'évaluation en 0, puis l'évaluation en 0 de la dérivée de cette identité, donnent

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0.$$

La soustraction donne $a_2 = 0$, puis $a_1 = 0$. Les deux fonctions sont donc indépendantes au sens demandé.

3. (a) La question 1 assure déjà que $h = f - a_1 f_1 - a_2 f_2$ appartient à F . Les conditions supplémentaires sont exactement

$$a_1 + a_2 = f(0), \quad a_1 + 2a_2 = f'(0).$$

Par soustraction, ce système possède l'unique solution

$$a_2 = f'(0) - f(0), \quad a_1 = 2f(0) - f'(0).$$

Ces valeurs assurent effectivement $h(0) = h'(0) = 0$. Elles fournissent donc l'unique couple demandé.

(b) Le second nom de fonction est rectifié en g_2 : le texte introductif original répétait g_1 .

Comme $f \in C^2(\mathbb{R})$, les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivation d'un produit donne

$$g'_1(x) = e^{-x}(f''(x) - 2f'(x) - f'(x) + 2f(x)) = e^{-x}(f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)) = 0,$$

$$g'_2(x) = e^{-2x}(f''(x) - f'(x) - 2f'(x) + 2f(x)) = e^{-2x}(f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante. Ainsi g_1 et g_2 sont constantes sur $\mathbb{R}$.

(c) Méthode 1 — Utilisation des deux constantes.

Si $f \in F_0$, les constantes de la question précédente valent $g_1(0) = g_2(0) = 0$. Comme les exponentielles ne s'annulent pas, il vient, pour tout x ,

$$f'(x) - 2f(x) = 0, \quad f'(x) - f(x) = 0.$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient $f(x) = 0$. Ainsi F_0 ne contient que la fonction nulle.

Méthode 2 — Résolution de l'équation différentielle.

L'équation différentielle linéaire homogène $f'' - 3f' + 2f = 0$ a pour équation caractéristique réelle $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0$. Le résultat de cours sur les équations différentielles à coefficients constants et à deux racines réelles distinctes donne

$$f(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$

Les conditions $f(0) = f'(0) = 0$ donnent $A + B = 0$ et $A + 2B = 0$, donc $A = B = 0$. On conclut encore $f = 0$. La première méthode suit le guidage du sujet et construit l'unicité ; la seconde utilise le résultat de résolution du cours.

4. Question adaptée au programme actuel.

La dérivation et l'évaluation sont compatibles avec les combinaisons linéaires. Pour $h, k \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la stabilité de la question 1 permet d'écrire

$$\Phi(ah + bk) = (ah(0) + bk(0), ah'(0) + bk'(0)) = a\Phi(h) + b\Phi(k).$$

Si $\Phi(h) = \Phi(k)$, alors $h - k \in F_0$; la question 3(c) entraîne $h = k$. Donc Φ est injective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, la fonction

$$f = (2p - q)f_1 + (q - p)f_2$$

appartient à F et satisfait $f(0) = p$, $f'(0) = q$. L'application est donc surjective et

$$\Phi^{-1}(p, q) : x \mapsto (2p - q)e^x + (q - p)e^{2x}.$$

Une bijection préservant les combinaisons linéaires identifie ici F à $\mathbb{R}^2$; ceci justifie sa structure d'espace vectoriel de dimension 2, sans théorie en dimension infinie.

L'application Φ est un isomorphisme. Les questions 2 et 3 montrent aussi directement que (f_1, f_2) est une base de F .

EXERCICE 2

1. L'initialisation $u_0 = 1 > 0$ permet de calculer $u_1 = \sqrt{2} > 1$, puis $u_2 = 1/(\sqrt{2} - 1) > 0$.

Plus généralement, si $u_{2n} > 0$, alors $u_{2n+1} = \sqrt{1 + u_{2n}} > 1$, de sorte que $u_{2n+2} = 1/(u_{2n+1} - 1)$ est bien défini et strictement positif. Une récurrence sur n construit ainsi tous les termes et établit les deux inégalités demandées.

2. Sur le domaine $[0, +\infty[$, l'égalité $\sqrt{1+x} = x$ équivaut, puisque $x \geq 0$, à $x^2 - x - 1 = 0$. Ses racines sont $(1 - \sqrt{5})/2 < 0$ et $(1 + \sqrt{5})/2 > 0$. Seule la seconde appartient au domaine.

Sur le domaine $]1, +\infty[$, l'égalité $1/(x-1) = x$ équivaut également à $x^2 - x - 1 = 0$. Seule la racine positive appartient à ce domaine. Ainsi les deux équations possèdent la même unique solution

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha^2 = \alpha + 1, \quad \alpha(\alpha - 1) = 1.$$

3. Pour $x > 1$, $g(x) > 0$, donc $\varphi(x)$ est défini et

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}} > 1.$$

La fonction g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Leur composée φ est donc strictement décroissante. Comme son image est incluse dans $]1, +\infty[$, $\psi = \varphi \circ \varphi$ est définie sur cet intervalle. La composée de ces deux fonctions strictement décroissantes est strictement croissante.

Les égalités $f(\alpha) = g(\alpha) = \alpha$ donnent $\varphi(\alpha) = \alpha$, puis $\psi(\alpha) = \alpha$.

4. Posons $y = \sqrt{x/(x-1)} > 1$. L'expression de gauche est $\psi(x) = \sqrt{y/(y-1)}$. Pour $x > 1$, toutes les quantités mises au carré ci-dessous sont positives ; les équivalences préservent donc les inégalités :

$$\psi(x) > x \iff \frac{y}{y-1} > x^2 \iff x^2 > (x^2 - 1)y.$$

La différence des carrés des deux derniers membres vaut

$$x^4 - (x^2 - 1)^2 y^2 = x^4 - x(x-1)(x+1)^2 = x(1+x-x^2).$$

Pour $1 < x < \alpha$, le trinôme $1 + x - x^2$ est strictement positif, puisque ses racines sont $(1 - \sqrt{5})/2$ et α . La différence est donc positive, et $x^2 > (x^2 - 1)y$. Cela prouve exactement l'inégalité demandée.

Le même calcul montre, pour tout $x > 1$, que $\psi(x) = x$ équivaut à $x^2 - x - 1 = 0$. Ainsi α est l'unique point fixe de ψ sur $]1, +\infty[$.

5. (a) On a $v_0 = u_1 = \sqrt{2}$. Or $\alpha > 1$ et $\alpha^2 = \alpha + 1 > 2$. Comme ces nombres sont positifs, $\alpha > \sqrt{2} = v_0 > 1$.

(b) Les récurrences de départ donnent, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{4n+3} = f(g(u_{4n+1})) = \varphi(v_n),$$

$$v_{n+1} = u_{4n+5} = f(g(u_{4n+3})) = \varphi(\varphi(v_n)) = \psi(v_n).$$

Les domaines de ces compositions sont justifiés à la question 1.

(c) On prouve par récurrence la propriété plus précise $1 < v_n < \alpha$. Elle est vraie au rang 0. Si elle est vraie au rang n , la question 4 et la stricte croissance de ψ donnent

$$1 < v_n < \psi(v_n) = v_{n+1} < \psi(\alpha) = \alpha.$$

La récurrence est donc établie. En particulier (v_n) est strictement croissante, donc croissante, et $1 < v_n \leq \alpha$ pour tout n .

(d) La suite est croissante et majorée par α ; elle converge donc vers un réel $\ell \in [v_0, \alpha]$.

Comme $v_0 > 1$, la fonction ψ est continue en ℓ . Le passage à la limite dans $v_{n+1} = \psi(v_n)$ donne $\ell = \psi(\ell)$. D'après la caractérisation du point fixe établie à la question 4, $\ell = \alpha$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$.

6. Les trois suites s'écrivent

$$u_{4n+2} = g(v_n), \quad u_{4n+3} = f(g(v_n)) = \varphi(v_n), \quad u_{4n+4} = g(\varphi(v_n)).$$

Comme $\alpha > 1$, g est continue en α . La fonction φ est aussi continue en α , avec $\varphi(\alpha) = \alpha$. Les trois passages à la limite sont donc légitimes et donnent respectivement

$$g(\alpha) = \alpha, \quad \varphi(\alpha) = \alpha, \quad g(\varphi(\alpha)) = \alpha.$$

Les trois suites convergent toutes vers α .

7. Nous avons établi que les quatre suites de termes d'indices $4n + 1$, $4n + 2$, $4n + 3$ et $4n + 4$ convergent vers α . Justifions explicitement que cela suffit.

Pour $\varepsilon > 0$, chacune fournit un entier à partir duquel ses termes sont à distance strictement inférieure à ε de α . Soit N le maximum de ces quatre entiers. Tout entier $m \geq 4N + 4$ s'écrit $4n + r$ avec $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $n \geq N$. On a donc $|u_m - \alpha| < \varepsilon$.

Ainsi la suite entière converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

EXERCICE 3

A.

1. Pour tout entier relatif k , les quatre fonctions sont entièrement décrites par les morceaux suivants :

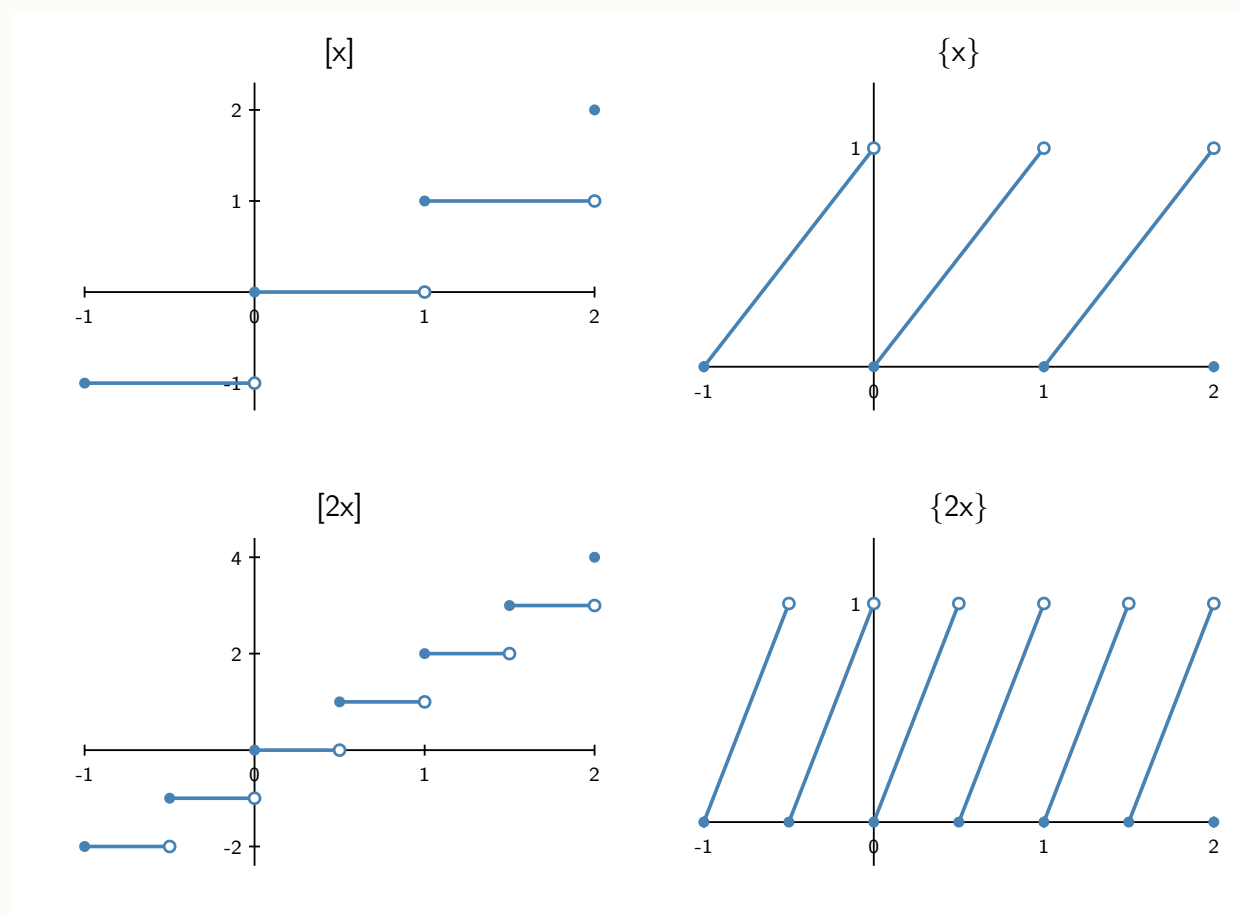
$$[x] = k \quad \text{pour } x \in [k, k + 1[,$$

$$\{x\} = x - k \quad \text{pour } x \in [k, k + 1[,$$

$$[2x] = k \quad \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2} \right[,$$

$$\{2x\} = 2x - k \quad \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2} \right[.$$

Les parties entières donnent des marches horizontales, tandis que les parties décimales donnent des segments croissants allant de 0 inclus à 1 exclu. Les deux dernières courbes s'obtiennent par une contraction horizontale de facteur 2. Les courbes ci-dessous montrent des portions représentatives ; les formules précédentes les définissent sur toute la droite. Un point plein appartient à la courbe et un point blanc en est exclu.



2. Méthode 1 — Séparation des deux demi-intervalles.

Écrivons $x = m + r$, où $m = [x] \in \mathbb{Z}$ et $r = \{x\} \in [0, 1[$. Si $0 \leq r < 1/2$, alors $[2x] = 2m$ et $[x + 1/2] = m$. Si $1/2 \leq r < 1$, alors $[2x] = 2m + 1$ et $[x + 1/2] = m + 1$. Dans les deux cas,

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right].$$

Méthode 2 — Parité de la partie entière de $2x$.

Posons $j = [2x]$. Si $j = 2m$ est pair, l'encadrement $2m \leq 2x < 2m + 1$ donne $m \leq x < m + 1/2$, donc $[x] = [x + 1/2] = m$. Si $j = 2m + 1$ est impair, il donne $m + 1/2 \leq x < m + 1$, donc $[x] = m$ et $[x + 1/2] = m + 1$. La somme vaut dans les deux cas $j = [2x]$. La première méthode exploite la partie décimale ; la seconde explique le rôle de la parité, y compris pour les entiers négatifs.

B.

1. Fixons $n \geq 1$. Pour $t \geq 0$, la positivité de n donne

$$P(nX \leq t) = P(X \leq t/n) = F(t/n).$$

Pour $t < 0$, cette probabilité est nulle. La fonction de répartition obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, car $F(0) = P(X = 0) = 0$ pour une variable à densité positive. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec dérivée $f(t/n)/n$. Une densité de nX est donc

$$f_{nX}(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} f(t/n) & t \geq 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

La valeur choisie en 0 n'influe pas sur la loi. Cette fonction possède des limites finies aux bornes et en tout point réel, conformément au cadre des densités.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, les événements $[X] = k$ et $k \leq X < k + 1$ sont identiques. La variable X étant à densité, ses probabilités ponctuelles sont nulles ; ainsi

$$P([X] = k) = F(k + 1) - F(k) = \int_k^{k+1} f(t) dt.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$ négatif, la probabilité est nulle. Ces valeurs donnent toute la loi de $[X]$, qui est à valeurs dans $\mathbb{N}$; certaines valeurs peuvent avoir une probabilité nulle selon f .

3. Pour $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[nX] = k$ équivaut à $k/n \leq X < (k+1)/n$. Par conséquent,

$$P([nX] = k) = F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt.$$

Les probabilités sont nulles pour les entiers négatifs. La somme des probabilités vaut bien 1 : les sommes jusqu'à K télescopent en $F((K+1)/n) - F(0)$ et tendent vers 1 lorsque K tend vers l'infini.

C.

1. La fonction donnée est positive et son intégrale sur $[0, A]$ vaut $1 - e^{-\lambda A}$, qui tend vers 1 puisque $\lambda > 0$. Elle est donc une densité, celle de la loi exponentielle de paramètre λ . Sa fonction de répartition est

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0. \end{cases}$$

L'espérance existe et vaut $1/\lambda$, conformément au résultat du cours. On peut également le vérifier directement : l'intégration par parties sur le segment $[0, A]$ donne

$$\int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx = -Ae^{-\lambda A} + \frac{1 - e^{-\lambda A}}{\lambda}.$$

Les croissances comparées donnent $Ae^{-\lambda A} \rightarrow 0$, donc l'intégrale positive converge. Cela établit son absolue convergence et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

2. Par B.2, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([X] = k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k}.$$

Posons $q = e^{-\lambda} \in]0, 1[$ et $p = 1 - q \in]0, 1[$. La variable $[X] + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi $[X]$ est une loi géométrique décalée sur $\mathbb{N}$; elle n'est pas une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$.

Méthode 1 — Décalage de la loi géométrique.

La loi géométrique admet une espérance $1/p$. La variable $[X] = ([X] + 1) - 1$ est donc intégrable et

$$E([X]) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{1 - q} = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Méthode 2 — Série géométrique dérivée.

La série usuelle

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = 1/(1 - q)^2$$

converge pour $0 < q < 1$. Les termes étant positifs, elle justifie l'existence de l'espérance et

$$E([X]) = (1 - q) \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = (1 - q) \frac{q}{(1 - q)^2} = \frac{q}{1 - q}.$$

La première méthode reconnaît une loi usuelle; la seconde permet de retrouver le résultat directement à partir des probabilités.

3. D'après B.3,

$$P([nX] = k) = (1 - e^{-\lambda/n})e^{-\lambda k/n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Comme à la question précédente, $[nX] + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda/n} > 0$. L'espérance de Y_n existe donc et vaut

$$m_n = \frac{1}{n} \frac{e^{-\lambda/n}}{1 - e^{-\lambda/n}} = \frac{1}{n(e^{\lambda/n} - 1)}.$$

Méthode 1 — Taux d'accroissement de l'exponentielle.

En posant $h = \lambda/n$, on a $h \rightarrow 0$ et

$$n(e^{\lambda/n} - 1) = \lambda \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow \lambda.$$

Le taux d'accroissement tend vers $\exp'(0) = 1$. La limite du dénominateur est strictement positive ; ainsi $m_n \rightarrow 1/\lambda$.

Méthode 2 — Encadrement de l'erreur de discrétisation.

Pour tout réel positif x , $0 \leq x - [nx]/n < 1/n$. Il en résulte $0 \leq X - Y_n < 1/n$. Les variables X et Y_n sont intégrables d'après les questions précédentes ; la croissance de l'espérance donne

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} - m_n \leq \frac{1}{n}.$$

Le théorème d'encadrement donne à nouveau $m_n \rightarrow 1/\lambda$. Cette seconde méthode quantifie l'erreur sans utiliser la formule explicite de m_n .

4. Question rectifiée : la densité demandée est celle de $\{X\}$, et non celle de $[X]$. La variable $[X]$ est discrète et n'admet pas de densité ; la loi de $[X]$ a déjà été déterminée en C.2.

Notons $Z = \{X\}$. On a $0 \leq Z < 1$. Pour $0 \leq t < 1$, l'événement $Z \leq t$ est la réunion disjointe des événements $k \leq X \leq k + t$, pour $k \in \mathbb{N}$. Les bornes ne créent aucune masse ponctuelle, puisque X est à densité. L'additivité des probabilités et la série géométrique

donnent

$$P(Z \leq t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+t)}) = (1 - e^{-\lambda t}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Ainsi

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} & 0 \leq t < 1, \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en 0 et en 1, et de classe C^1 ailleurs. Une densité est

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} & 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle est positive, possède des limites unilatérales finies en tout point et son intégrale sur $[0, 1]$ vaut 1. Comme $0 \leq Z < 1$, l'espérance existe.

Méthode 1 — Intégration de la densité.

Une intégration par parties sur $[0, 1]$ donne

$$E(Z) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{-e^{-\lambda} + (1 - e^{-\lambda})/\lambda}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Méthode 2 — Décomposition en partie entière et partie décimale.

L'identité $X = [X] + Z$, jointe à l'intégrabilité de ces trois variables, autorise la linéarité de l'espérance, sans hypothèse d'indépendance. Les résultats C.1 et C.2 donnent alors

$$E(Z) = E(X) - E([X]) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^\lambda - 1}.$$

La première méthode exploite la densité calculée ; la seconde relie directement la partie décimale à l'erreur de discrétisation. La valeur est strictement positive puisque $e^\lambda > 1 + \lambda$ pour $\lambda > 0$, et strictement inférieure à 1, comme l'assure aussi $0 \leq Z < 1$ presque sûrement.

Relevé des adaptations

I.1 : remplacement de l'affirmation portant sur des sous-espaces de l'espace infini $C^2(\mathbb{R})$ par la vérification concrète des mêmes stabilités. Le programme se limite aux espaces vectoriels de dimension finie ; le contenu relatif aux solutions de l'équation différentielle est conservé intégralement.

I.2 : formulation élémentaire de l'indépendance, par l'implication

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0, \text{ avant l'identification à un espace de dimension finie.}$$

I.3(b) : rectification du doublon typographique « g_1 et g_1 » en « g_1 et g_2 », conformément aux deux formules du PDF.

I.4 : explicitation de la bijectivité et de la conservation des combinaisons linéaires avant la conclusion d'isomorphisme ; la dimension 2 est ainsi établie dans le cadre du programme actuel.

III.C.4 : rectification de « densité de $[X]$ » en « densité de $\{X\}$ ». La première variable est discrète et n'admet pas de densité ; le contexte de la question et sa première phrase déterminent la seconde. Aucune donnée de loi n'est modifiée.