



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1991

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Résoudre par la méthode du pivot de Gauss, en discutant suivant la valeur du paramètre λ , le système d'équations :

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

En déduire les valeurs propres de la matrice M .

1. (b) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable. Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de vecteurs propres de f que l'on choisira de manière que chacun ait, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, des coordonnées égales à 0 ou à 1.
2. À tout vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ fixé, on associe la fonction φ_y de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi_y(x) = (y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 2y_2)x_2 + y_3x_3.$$

2. (a) Le vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ étant fixé dans $\mathbb{R}^3$, exprimer $\varphi_y(f(x))$ en fonction des coordonnées x_1, x_2, x_3 de x .
2. (b) Montrer qu'à chaque vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on peut faire correspondre un vecteur $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ et un seul de $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, $\varphi_y(f(x)) = \varphi_Y(x)$. À cet effet, on exprimera Y_1, Y_2, Y_3 en fonction de y_1, y_2, y_3 .

On pose $Y = g(y)$. Vérifier que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; en donner la matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ représenté par S dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Calculer l'inverse S^{-1} de S .
3. (b) Calculer le produit matriciel $SM S^{-1}$.
3. (c) En déduire que les vecteurs $s(V_1)$, $s(V_2)$ et $s(V_3)$ sont des vecteurs propres de la matrice ${}^tN$, transposée de la matrice N . Préciser les valeurs propres associées.

EXERCICE 2

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul n , on considère la fonction polynomiale P_n définie par la relation :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - a.$$

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n . Montrer que $x_n \leq a$.
2. Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est monotone.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On note l sa limite. Prouver que $0 \leq l < 1$.

4. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n , le nombre x_n est solution de l'équation :

$$x^{n+1} - (a+1)x + a = 0.$$

En déduire que $l = \frac{a}{a+1}$.

EXERCICE 3

On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et par p un nombre réel tel que $0 < p < 1$. On rappelle que le symbole $P(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

I.

Un jour donné, un modèle de voiture est successivement examiné par N clients éventuels. On suppose que N est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels, telle que, pour tout couple (r, s) de nombres entiers naturels :

$$P(N \geq r + s / N \geq r) = P(N \geq s).$$

On note $q = P(N \geq 1)$.

[DONNÉE À VÉRIFIER — page 2, exercice 3 : le document ne précise aucune relation entre p et la loi de N .]

1. Déterminer la probabilité $P(N \geq 1)$. En choisissant $r = s = 1$, calculer $P(N \geq 2)$. En déduire la valeur de $P(N = 1)$.
2. En raisonnant par récurrence, trouver, pour tout nombre entier naturel n , les probabilités $P(N \geq n)$ et $P(N = n)$.
3. Trouver l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de N .

4. Application numérique. On suppose que $p = \frac{1}{10}$. Calculer $P(N = n)$, $E(N)$ et $V(N)$.

II.

Parmi les clients qui examinent le modèle, certains passent commande, les autres non. Pour tout nombre entier naturel non nul i , on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le i -ième client passe commande d'une voiture et 0 dans le cas contraire. On convient que $X_0 = 0$.

On désigne par α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On suppose que la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que, pour tout nombre entier naturel non nul i , $P(X_i = 1) = \alpha$.

On suppose enfin que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes et indépendantes de N .

1. Pour tout nombre entier naturel n , on pose $S_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n$. Déterminer la loi de probabilité de S_n .
2. On note S la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de la façon suivante : pour tout élément ω de Ω , si $N(\omega) = n$, on pose $S(\omega) = S_n(\omega)$. Ainsi, S représente le nombre de voitures commandées. On se propose de trouver la loi de probabilité de S .
2. (a) Soit k un nombre entier naturel. On admet, la justification n'étant pas demandée, que, pour tout nombre réel fixé x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, la série

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$$

est convergente. On note σ_k la somme de cette série. Ainsi,

$$\sigma_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

Montrer que, pour tout entier naturel k , $\sigma_{k+1} = x\sigma_k + x\sigma_{k+1}$.

2. (b) En déduire par récurrence sur k que $\sigma_k = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

2. (c) Trouver la loi de probabilité de S .

2. (d) Application numérique. On suppose que $p = \frac{1}{10}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. Déterminer la loi de probabilité de S .

Vérifier qu'elle est du même type que la loi de N obtenue dans la partie I. Calculer l'espérance et la variance de S .