



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1991

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. (a) On effectue un pivot de Gauss sans diviser par une expression dépendant de λ .

La troisième équation, dont le coefficient de x_1 vaut 1, donne

$$x_1 = x_2 + (\lambda - 3)x_3.$$

Après substitution dans la deuxième et la première équation, on obtient respectivement

$$-(\lambda + 2)x_2 + (8 - 2\lambda)x_3 = 0,$$

$$-(\lambda + 2)x_2 + (-\lambda^2 + 4\lambda)x_3 = 0.$$

En retranchant la première de ces deux lignes à la seconde, le système devient équivalent à

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + (\lambda - 3)x_3, \\ -(\lambda + 2)x_2 + (8 - 2\lambda)x_3 = 0, \\ (\lambda - 2)(\lambda - 4)x_3 = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda \notin \{-2, 2, 4\}$, la dernière ligne impose $x_3 = 0$, puis la deuxième impose $x_2 = 0$ et la première $x_1 = 0$.

Si $\lambda = -2$, la dernière ligne impose $x_3 = 0$. La deuxième ligne n'impose alors rien à x_2 et la première donne $x_1 = x_2$. Les solutions sont $(t, t, 0)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 2$, la deuxième ligne donne $x_2 = x_3$ et la première $x_1 = 0$. Les solutions sont $(0, t, t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 4$, la deuxième ligne donne $x_2 = 0$ et la première $x_1 = x_3$. Les solutions sont $(t, 0, t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Le système est précisément $Mx = \lambda x$. Il possède une solution non nulle exactement pour $\lambda \in \{-2, 2, 4\}$. Ce sont donc les trois valeurs propres de M .

1. (b) D'après les solutions précédentes, on peut prendre

$$V_1 = (1, 1, 0), \quad V_2 = (0, 1, 1), \quad V_3 = (1, 0, 1),$$

associés respectivement aux valeurs propres -2 , 2 et 4 . Leurs coordonnées sont bien égales à 0 ou à 1.

Ces vecteurs propres non nuls sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes : ils forment donc une famille libre. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, c'est une base. Dans cette base, la matrice de f est

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, f est diagonalisable.

2. (a) Les coordonnées de $f(x)$ sont $x_1 - 3x_2 + 3x_3$, $-2x_1 + 2x_3$ et $x_1 - x_2 + 3x_3$. En les substituant dans la définition de φ_y , on obtient

$$\varphi_y(f(x)) = (y_1 + y_2)(x_1 - 3x_2 + 3x_3) + (y_1 + 2y_2)(-2x_1 + 2x_3) + y_3(x_1 - x_2 + 3x_3).$$

Le coefficient de x_1 est $(y_1 + y_2) - 2(y_1 + 2y_2) + y_3 = -y_1 - 3y_2 + y_3$. Celui de x_2 est $-3(y_1 + y_2) - y_3 = -3y_1 - 3y_2 - y_3$. Celui de x_3 est $3(y_1 + y_2) + 2(y_1 + 2y_2) + 3y_3 = 5y_1 + 7y_2 + 3y_3$. Ainsi,

$$\varphi_y(f(x)) = (-y_1 - 3y_2 + y_3)x_1 + (-3y_1 - 3y_2 - y_3)x_2 + (5y_1 + 7y_2 + 3y_3)x_3.$$

2. (b) L'égalité des deux fonctions pour tout x équivaut à l'égalité de leurs trois coefficients ; la nécessité se vérifie en prenant les trois vecteurs de la base canonique. Il faut donc et il suffit que

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = -y_1 - 3y_2 + y_3, \\ Y_1 + 2Y_2 = -3y_1 - 3y_2 - y_3, \\ Y_3 = 5y_1 + 7y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

La différence des deux premières lignes fournit $Y_2 = -2y_1 - 2y_3$, puis la première donne $Y_1 = y_1 - 3y_2 + 3y_3$. Par conséquent, il existe un unique vecteur Y , donné par

$$Y = (y_1 - 3y_2 + 3y_3, -2y_1 - 2y_3, 5y_1 + 7y_2 + 3y_3).$$

Chaque coordonnée est une combinaison linéaire des coordonnées de y , sans terme constant. On a donc $g(uy + vz) = ug(y) + vg(z)$ pour tous vecteurs y, z et tous réels u, v . L'application g est linéaire et sa matrice canonique est

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Pour résoudre $Sz = w$, on écrit $z_1 + z_2 = w_1$, $z_1 + 2z_2 = w_2$ et $z_3 = w_3$. D'où

$$z_2 = w_2 - w_1, \quad z_1 = 2w_1 - w_2, \quad z_3 = w_3.$$

Pour chaque w , il existe un unique z . La matrice S est donc inversible et

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La multiplication directe redonne $SS^{-1} = S^{-1}S = I_3$.

3. (b) On commence par multiplier S et M :

$$SM = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En multipliant à droite par l'inverse trouvé en (a), on obtient

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = {}^tN.$$

3. (c) Posons $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. La relation précédente entraîne $({}^tN)S = SM$.

Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$({}^tN)s(V_i) = ({}^tN)SV_i = SMV_i = S(\lambda_i V_i) = \lambda_i s(V_i).$$

Puisque S est inversible et $V_i \neq 0$, on a $s(V_i) \neq 0$: ce sont bien des vecteurs propres.

Explicitement,

$$s(V_1) = (2, 3, 0), \quad s(V_2) = (1, 2, 1), \quad s(V_3) = (1, 1, 1),$$

associés respectivement à -2 , 2 et 4 .

EXERCICE 2

1. Sur $[0, +\infty[$, la fonction P_n est continue et strictement croissante. En effet, pour $x \geq 0$,

$$P'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \geq 1.$$

De plus, $P_n(0) = -a < 0$ et $P_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires puis la stricte croissance donnent l'existence et l'unicité d'une racine

positive x_n .

La relation $P_n(x_n) = 0$ s'écrit $x_n + x_n^2 + \dots + x_n^n = a$. Tous ces termes étant positifs, $0 < x_n \leq a$; l'égalité est atteinte pour $n = 1$ et l'inégalité est stricte pour $n \geq 2$.

2. Comme $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1}$, on a

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} > 0 = P_{n+1}(x_{n+1}).$$

La fonction P_{n+1} étant strictement croissante sur les réels positifs, cela entraîne $x_n > x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc strictement décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 0; elle converge donc vers une limite $l \geq 0$.
Pour établir $l < 1$, deux arguments sont possibles.

Méthode 1 — Contradiction à partir de la somme définissante.

Supposons $l \geq 1$. Pour tout n , la décroissance implique $x_n \geq l \geq 1$. L'égalité

$$a = \sum_{k=1}^n x_n^k$$

donnerait alors $a \geq n$ pour tout entier $n \geq 1$, ce qui est impossible. Ainsi $l < 1$.

Méthode 2 — Localisation d'une racine avant de passer à la limite.

Choisissons un entier $m > a$. On a $P_m(1) = m - a > 0$, tandis que $P_m(x_m) = 0$. La stricte croissance donne $x_m < 1$. Comme la suite est décroissante, $0 \leq l \leq x_m < 1$.

La première approche utilise directement la définition des racines; la seconde fournit une borne fixe strictement inférieure à 1, qui sera également utile à la question suivante.

4. On multiplie l'égalité

$$\sum_{k=1}^n x_n^k = a$$

par $1 - x_n$. La somme est finie :

$$(1 - x_n) \sum_{k=1}^n x_n^k = x_n - x_n^{n+1} = a(1 - x_n).$$

Après réorganisation,

$$x_n^{n+1} - (a + 1)x_n + a = 0.$$

Cette identité ne nécessite aucune division par $1 - x_n$; elle reste donc valable même si $x_n = 1$ pour un indice particulier.

Pour passer à la limite, il faut justifier le comportement de la puissance dont l'exposant varie. Choisissons $m > a$ comme à la question 3. Pour $n \geq m$, la décroissance donne $0 < x_n \leq x_m < 1$, donc

$$0 \leq x_n^{n+1} \leq x_m^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Le passage à la limite dans l'identité précédente donne $-(a + 1)l + a = 0$. Comme $a + 1 > 0$, on conclut

$$l = \frac{a}{a + 1}.$$

EXERCICE 3

I.

1. La donnée manquante signalée dans le sujet interdit d'exprimer $P(N \geq 1)$ en fonction du seul p . On utilise la notation $q = P(N \geq 1)$, qui est une définition et n'ajoute aucune relation avec p .

L'hypothèse de probabilités conditionnelles pour tous les entiers r suppose que $P(N \geq r) > 0$. En particulier, $q > 0$. En prenant $r = s = 1$ et en utilisant $\{N \geq 2\} \subset \{N \geq 1\}$, on obtient

$$\frac{P(N \geq 2)}{P(N \geq 1)} = P(N \geq 1) = q.$$

Ainsi, $P(N \geq 2) = q^2$. Par différence entre deux événements emboîtés,

$$P(N = 1) = P(N \geq 1) - P(N \geq 2) = q - q^2 = q(1 - q).$$

L'hypothèse sans mémoire fixe ces relations, mais ne fixe pas la valeur de q .

2. Pour $n = 0$, on a $P(N \geq 0) = 1 = q^0$ puisque N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Supposons $P(N \geq n) = q^n$. L'hypothèse avec $r = n$ et $s = 1$, puis la formule des probabilités composées, donnent

$$P(N \geq n + 1) = P(N \geq n)P(N \geq n + 1 / N \geq n) = q^n q = q^{n+1}.$$

La récurrence établit donc $P(N \geq n) = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par différence,

$$P(N = n) = P(N \geq n) - P(N \geq n + 1) = (1 - q)q^n.$$

On a $q \leq 1$ parce que q est une probabilité. Le cas $q = 1$ entraînerait $P(N = n) = 0$ pour tout n , donc, par additivité dénombrable, $P(N \in \mathbb{N}) = 0$, en contradiction avec l'hypothèse. Par conséquent, $0 < q < 1$.

Inversement, pour tout choix de $q \in]0, 1[$, les nombres $(1 - q)q^n$ sont positifs et leur somme vaut 1. Ils définissent une loi vérifiant l'hypothèse sans mémoire, car $q^{r+s}/q^r = q^s$. La donnée du sujet laisse donc effectivement une famille entière de lois possibles.

3. Méthode 1 — Calcul des moments par les séries usuelles.

Comme $0 < q < 1$, les séries géométriques dérivées du programme convergent et donnent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Les variables N et $N(N-1)$ sont positives. Les sommes correspondantes sont finies ; les moments utilisés existent donc. On obtient

$$E(N) = (1-q) \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{1-q},$$

$$E(N(N-1)) = (1-q) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^2}.$$

Puisque $N^2 = N(N-1) + N$, le second moment est fini et

$$E(N^2) = \frac{2q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{1-q} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^2}.$$

La formule de Kœnig-Huygens fournit

$$V(N) = E(N^2) - (E(N))^2 = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Méthode 2 — Décalage vers une loi usuelle.

Posons $G = N + 1$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$P(G = m) = P(N = m - 1) = (1-q)q^{m-1}.$$

Ainsi, G suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1 - q \in]0, 1[$. Ses moments existent et valent $E(G) = 1/(1 - q)$, $V(G) = q/(1 - q)^2$. Par transformation affine,

$$E(N) = E(G) - 1 = \frac{q}{1 - q}, \quad V(N) = V(G) = \frac{q}{(1 - q)^2}.$$

La première méthode calcule directement à partir de la loi; la seconde montre comment reconnaître une loi géométrique lorsque le support commence à 0 au lieu de 1.

4. La seule égalité $p = 1/10$ ne détermine pas q , car le document ne donne aucune relation entre p et N . Les réponses rigoureusement déductibles restent

$$P(N = n) = (1 - q)q^n, \quad E(N) = \frac{q}{1 - q}, \quad V(N) = \frac{q}{(1 - q)^2}, \quad 0 < q < 1.$$

Par exemple, les choix $q = 1/2$ et $q = 9/10$ satisfont tous deux les hypothèses, même lorsque $p = 1/10$; ils donnent respectivement $E(N) = 1$ et $E(N) = 9$. Il n'existe donc pas de réponse numérique unique à cette question dans le document fourni. Une relation supplémentaire entre p et la loi de N doit être vérifiée dans la source avant tout calcul numérique.

II.

1. Si $n \geq 1$, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre α . Puisque $X_0 = 0$, leur somme S_n suit la loi binomiale de paramètres n et α :

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, n\}.$$

La probabilité vaut 0 pour les autres entiers. Pour $n = 0$, $S_0 = 0$ est une variable certaine. La même formule s'applique en prenant $k = 0$, $\binom{0}{0} = 1$ et la convention usuelle des puissances d'exposant nul.

2. (a) Fixons $x \in [0, 1[$. Les séries considérées convergent par l'admission de l'énoncé et sont à termes positifs ; leurs décalages et additions sont donc légitimes. L'identité de Pascal donne, pour $n \geq k + 1$,

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1},$$

où $\binom{k}{k+1} = 0$ lorsque $n = k + 1$. On en déduit

$$\sigma_{k+1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n-1}{k} x^n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n-1}{k+1} x^n.$$

Dans la première somme, posons $m = n - 1$; elle vaut

$$x \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} x^m = x \sigma_k.$$

Dans la seconde, le terme correspondant à $m = k$ est nul, donc elle vaut

$$x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m = x \sigma_{k+1}.$$

Ainsi,

$$\sigma_{k+1} = x \sigma_k + x \sigma_{k+1}.$$

Ce raisonnement reste valable pour $x = 0$: aucune division par x n'a été effectuée.

2. (b) Pour $k = 0$, la somme géométrique donne

$$\sigma_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Supposons $\sigma_k = x^k / (1-x)^{k+1}$. D'après (a), $(1-x)\sigma_{k+1} = x\sigma_k$. Comme $x < 1$, on peut diviser par $1-x > 0$:

$$\sigma_{k+1} = \frac{x}{1-x} \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}.$$

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_k = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Pour $x = 0$, le cas $k = 0$ correspond à $\sigma_0 = 1$; pour $k \geq 1$, on a $\sigma_k = 0$, conformément à la formule.

2. (c) Le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne, pour tout entier $k \geq 0$,

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)P(S = k/N = n).$$

Sur l'événement $N = n$, on a $S = S_n$. De plus, l'indépendance de la famille des décisions et de N entraîne celle de S_n et de N . Comme $P(N = n) = (1-q)q^n > 0$, toutes les probabilités conditionnelles écrites sont définies et

$$P(S = k/N = n) = P(S_n = k).$$

Cette probabilité est nulle si $n < k$. Par la loi binomiale,

$$P(S = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-q)q^n \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}.$$

Les termes sont positifs. Comme $0 < \alpha < 1$, on peut mettre en facteur

$(1-q)(\alpha/(1-\alpha))^k$ et appliquer (b) avec $x = q(1-\alpha) \in]0, 1[$:

$$P(S = k) = (1-q) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^k \frac{(q(1-\alpha))^k}{(1-q(1-\alpha))^{k+1}} = \frac{(1-q)(q\alpha)^k}{(1-q+q\alpha)^{k+1}}.$$

Posons $d = 1 - q + q\alpha$ et $\rho = q\alpha/d$. On a $d > 0$, $q\alpha > 0$ et $d - q\alpha = 1 - q > 0$, donc $0 < \rho < 1$ et $1 - \rho = (1 - q)/d$. La loi s'écrit donc

$$P(S = k) = (1 - \rho)\rho^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ses probabilités somment à 1 par la somme géométrique. Elle est du même type que celle de N , avec ρ à la place de q ; $S + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - \rho$.

2. (d) Avec $\alpha = 1/2$, la formule précédente donne $d = 1 - q/2$ et $\rho = q/(2 - q)$. Ainsi,

$$P(S = k) = \frac{2(1 - q)}{2 - q} \left(\frac{q}{2 - q} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On retrouve la même famille de lois que pour N , sur le support $\mathbb{N}$. Puisque $0 < \rho < 1$, $S + 1$ suit une loi géométrique dont les moments sont finis. On en déduit

$$E(S) = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{q}{2(1 - q)},$$

$$V(S) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{q(2 - q)}{4(1 - q)^2}.$$

Ces résultats sont les réponses symboliques exactes permises par les données. La valeur $p = 1/10$ ne fournit toujours aucune valeur de q : on ne peut donc pas attribuer de valeurs numériques uniques aux probabilités, à l'espérance ou à la variance de S . Cette question nécessite la même vérification de donnée que I.4.

Relevé des adaptations

- Exercice 3, I, préambule et questions 1 à 4 ; II.2(c) et II.2(d) : introduction de la notation $q = P(N \geq 1)$ pour traiter la famille de lois effectivement déterminée par l'hypothèse sans mémoire. Aucune identification de q à p ou à $1 - p$ n'est ajoutée, car la relation entre p et la loi de N manque dans le document fourni. Les demandes originales et leurs numéros sont conservés ; les deux applications numériques sont signalées comme non déterminables de façon unique.