



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1988

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

Pour tout nombre entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx.$$

1. À l'aide d'un encadrement convenable de I_n , déterminer la limite de la suite (I_n) .

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n , on pose $J_n = nI_n$.

3. (a) Montrer que :

$$J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

3. (b) Montrer que, pour tout nombre réel positif t :

$$0 \leq \ln(1+t) \leq t.$$

En déduire la limite de la suite (J_n) .

EXERCICE 2

1. Montrer que, pour tout nombre réel t :

$$-1 \leq \frac{2t}{1+t^2} \leq 1.$$

2. On désigne désormais par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que, pour tous réels x et y , la fraction suivante soit définie et vérifie :

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}. \quad (1)$$

2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$-1 \leq f(x) \leq 1.$$

2. (b) Trouver toutes les fonctions constantes f vérifiant la relation (1).

Dans la suite de l'exercice, on suppose que f n'est pas constante.

2. (c) Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$-1 < f(x) < 1.$$

2. (d) Calculer $f(0)$. On pose $a = f'(0)$.

2. (e) En utilisant la définition de la dérivée, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de a .

2. (f) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $] -1, 1[$ et que la fonction f^{-1} est dérivable sur cet intervalle.

Calculer la dérivée de f^{-1} .

2. (g) Expliciter $f^{-1}(y)$ en fonction de y et de a . Trouver enfin toutes les fonctions f non constantes, dérivables et vérifiant la relation (1).

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la variance σ^2 existe et est non nulle. On suppose que X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont la même loi de probabilité.

1. Calculer l'espérance de X .
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante de X , de loi de probabilité :

$$P(Z = 1) = p, \quad P(Z = -1) = 1 - p,$$

où p est un nombre réel tel que $0 < p < 1$. On pourra poser $q = 1 - p$.

2. (a) Montrer que la variable aléatoire ZX a la même loi que X .
2. (b) Calculer la covariance des variables aléatoires X et ZX ; montrer que le coefficient de corrélation de X et ZX ne dépend pas de σ^2 .
3. On définit les variables aléatoires U , V et Y par les conditions :

$$U = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq 0, \\ 0 & \text{si } X < 0, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq 0, \\ 0 & \text{si } X > 0, \end{cases} \quad Y = U - V.$$

3. (a) Montrer que la variable aléatoire Y est symétrique.
3. (b) On note $|X|$ la valeur absolue de X . Comparer X et $Y|X|$. En déduire la valeur du coefficient de corrélation de Y et $|X|$ lorsqu'il est défini, et préciser dans quel cas il n'est pas défini.
3. (c) Montrer que les variables aléatoires Y et $|X|$ sont indépendantes si et seulement si $P(X = 0) = 0$.