



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1988

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. On encadre l'intégrande par une fonction dont l'intégrale tend vers zéro. Pour

$x \in [0, 1]$, on a $x^n \geq 0$ et $1 + x^n \geq 1$, donc :

$$0 \leq \frac{x^n}{1 + x^n} \leq x^n.$$

Ces fonctions sont continues sur $[0, 1]$. La croissance de l'intégrale donne :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Le majorant tend vers zéro. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. On utilise l'identité ponctuelle :

$$\frac{1}{1 + x^n} = 1 - \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Par linéarité de l'intégrale sur le segment $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n} = 1 - I_n.$$

La limite obtenue à la question précédente entraîne donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n} = 1.$$

3. (a) On intègre par parties sur le segment $[0, 1]$. La fonction $x \mapsto \ln(1 + x^n)$ est de classe C^1 sur ce segment et :

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + x^n) = \frac{nx^{n-1}}{1 + x^n}.$$

Ainsi :

$$J_n = \int_0^1 x \frac{nx^{n-1}}{1 + x^n} dx = [x \ln(1 + x^n)]_0^1 - \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx.$$

Le terme de bord vaut $\ln 2$, d'où :

$$J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx.$$

3. (b) Méthode 1 — Étude d'une différence.

Pour $t \geq 0$, la croissance du logarithme donne $\ln(1 + t) \geq \ln 1 = 0$. Posons

$h(t) = t - \ln(1 + t)$. Cette fonction est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0.$$

Par conséquent, $h(t) \geq h(0) = 0$. On obtient bien $0 \leq \ln(1 + t) \leq t$.

Méthode 2 — Encadrement d'une intégrale.

La fonction $s \mapsto 1/(1 + s)$ est continue sur $[0, t]$, et $0 \leq 1/(1 + s) \leq 1$ sur cet intervalle. En intégrant :

$$0 \leq \int_0^t \frac{ds}{1+s} = \ln(1+t) \leq \int_0^t 1 ds = t.$$

La première méthode repose sur le signe d'une dérivée ; la seconde permet directement de transférer un encadrement de fonctions à leurs intégrales.

Pour conclure sur J_n , on applique cette inégalité à $t = x^n$, pour $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Avec la formule de 3. (a), cela donne :

$$\ln 2 - \frac{1}{n+1} \leq J_n \leq \ln 2.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \ln 2$.

EXERCICE 2

1. Pour tout réel t , le dénominateur $1 + t^2$ est strictement positif. Or :

$$1 - \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(t-1)^2}{1+t^2} \geq 0, \quad 1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(t+1)^2}{1+t^2} \geq 0.$$

Ces deux inégalités donnent respectivement la majoration par 1 et la minoration par -1 . Ainsi, $-1 \leq 2t/(1+t^2) \leq 1$.

2. (a) On applique la relation (1) avec les deux arguments égaux à $x/2$:

$$f(x) = \frac{2f(x/2)}{1+f(x/2)^2}.$$

Le résultat de 1, appliqué au réel $t = f(x/2)$, donne $-1 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (b) Si f est constante de valeur $c \in \mathbb{R}$, la relation (1) équivaut à :

$$c = \frac{2c}{1+c^2}.$$

Comme $1+c^2 > 0$, cette égalité équivaut à $c(c^2-1) = 0$, soit $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Réciproquement, chacune de ces trois valeurs donne une fraction définie et satisfait la relation. Les trois solutions constantes sont donc $f \equiv -1$, $f \equiv 0$ et $f \equiv 1$.

On suppose désormais f non constante.

2. (c) On exclut l'atteinte des bornes. Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 1$. Pour tout réel y , la relation (1) doit être définie ; ainsi $1 + f(y) \neq 0$ et :

$$f(x_0 + y) = \frac{1 + f(y)}{1 + f(y)} = 1.$$

Comme $x_0 + y$ parcourt $\mathbb{R}$, la fonction serait constante, ce qui est exclu. De même, si $f(x_0) = -1$, le dénominateur $1 - f(y)$ est non nul et :

$$f(x_0 + y) = \frac{-1 + f(y)}{1 - f(y)} = -1.$$

Ce serait encore une fonction constante. Avec 2. (a), on en déduit $-1 < f(x) < 1$ pour tout réel x .

2. (d) La relation (1) avec $y = 0$ donne :

$$f(x)(1 + f(x)f(0)) = f(x) + f(0),$$

soit $f(0)(f(x)^2 - 1) = 0$. Puisque $|f(x)| < 1$, le second facteur ne s'annule pas. On obtient donc $f(0) = 0$.

On note $a = f'(0)$, qui existe par hypothèse.

2. (e) On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on applique (1) aux arguments x et h . Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} \frac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)f(h)}.$$

La dérivabilité de f en zéro entraîne sa continuité en zéro. Comme $f(0) = 0$, on a $f(h) \rightarrow 0$ et $f(h)/h \rightarrow a$. Le dénominateur du dernier facteur tend vers 1, qui est non nul. En passant à la limite :

$$f'(x) = a(1 - f(x)^2).$$

2. (f) On commence par montrer que $a \neq 0$. Si $a = 0$, la formule précédente donnerait $f'(x) = 0$ pour tout réel x . La fonction serait constante sur $\mathbb{R}$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $a \neq 0$.

Puisque $1 - f(x)^2 > 0$, la dérivée $f'(x)$ est partout non nulle et du signe de a . La fonction f est donc strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$. Elle est continue puisqu'elle est dérivable.

Déterminons ses limites aux deux infinis sans utiliser une formule explicite de f . Étant monotone et bornée, elle admet deux limites finies. En appliquant (1) à x et x :

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}.$$

Si L est la limite en l'un des deux infinis, la continuité de $t \mapsto 2t/(1 + t^2)$ donne :

$$L = \frac{2L}{1 + L^2}, \quad \text{donc} \quad L \in \{-1, 0, 1\}.$$

Si $a > 0$, la stricte croissance et $f(0) = 0$ donnent $f(1) > 0$ et $f(-1) < 0$. La limite en $+\infty$ est donc strictement positive et celle en $-\infty$ strictement négative. Elles valent respectivement 1 et -1 . Si $a < 0$, le même raisonnement avec les signes inversés donne respectivement -1 et 1.

Le théorème de la bijection, appliqué à la fonction continue et strictement monotone f , montre donc que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Sa réciproque $g = f^{-1}$ est continue sur cet intervalle.

Établissons directement sa dérivabilité. Fixons $y_0 \in] -1, 1[$ et posons $x_0 = g(y_0)$. Lorsque $y \rightarrow y_0$ avec $y \neq y_0$, la continuité et l'injectivité de g donnent $x = g(y) \rightarrow x_0$ avec $x \neq x_0$. Ainsi :

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Le dénominateur tend vers $f'(x_0) = a(1 - y_0^2) \neq 0$. Le quotient admet donc une limite et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{a(1 - y_0^2)}.$$

Ce raisonnement vaut en tout point de $] -1, 1[$.

2. (g) Méthode 1 — Calcul de la réciproque.

Sur $] -1, 1[$, les nombres $1 + y$ et $1 - y$ sont strictement positifs. On décompose la dérivée obtenue en 2. (f) :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y} \right).$$

La fonction $y \mapsto \frac{1}{2a} (\ln(1 + y) - \ln(1 - y))$ a cette même dérivée. La différence des deux fonctions est donc constante sur l'intervalle $] -1, 1[$. Comme $f^{-1}(0) = 0$, cette constante est nulle. Ainsi :

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right), \quad -1 < y < 1.$$

En posant $y = f(x)$, on obtient :

$$2ax = \ln \left(\frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \right), \quad e^{2ax} = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}.$$

Le dénominateur $1 - f(x)$ est strictement positif. En résolvant l'égalité pour $f(x)$:

$$f(x) = \frac{e^{2ax} - 1}{e^{2ax} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Méthode 2 — Transformation en une équation différentielle linéaire.

Pour retrouver la famille des fonctions f sans inverser explicitement f^{-1} , posons $H(x) = (1 + f(x))/(1 - f(x))$. Le dénominateur est strictement positif; H est dérivable, strictement positive et $H(0) = 1$. Grâce à 2. (e) :

$$H'(x) = \frac{2f'(x)}{(1 - f(x))^2} = \frac{2a(1 - f(x)^2)}{(1 - f(x))^2} = 2aH(x).$$

Les solutions de l'équation linéaire $H' - 2aH = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2ax}$. La condition $H(0) = 1$ impose $C = 1$. En résolvant $H = (1 + f)/(1 - f)$, on retrouve :

$$f(x) = \frac{H(x) - 1}{H(x) + 1} = \frac{e^{2ax} - 1}{e^{2ax} + 1}.$$

La première méthode calcule simultanément f^{-1} et f ; la seconde montre comment une transformation adaptée rend linéaire la relation portant sur la dérivée.

Il reste à vérifier que toutes les fonctions proposées satisfont effectivement (1). Pour $a \neq 0$, la fonction $f_a(x) = (e^{2ax} - 1)/(e^{2ax} + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car son dénominateur est strictement positif. Sa dérivée en zéro vaut $a \neq 0$, donc elle n'est pas constante. Pour deux réels x et y , posons $u = e^{2ax} > 0$ et $v = e^{2ay} > 0$. Alors :

$$f_a(x) + f_a(y) = \frac{2(uv - 1)}{(u + 1)(v + 1)},$$

$$1 + f_a(x)f_a(y) = \frac{2(uv + 1)}{(u + 1)(v + 1)} > 0.$$

La fraction de (1) est bien définie et vaut :

$$\frac{f_a(x) + f_a(y)}{1 + f_a(x)f_a(y)} = \frac{uv - 1}{uv + 1} = \frac{e^{2a(x+y)} - 1}{e^{2a(x+y)} + 1} = f_a(x + y).$$

Les solutions non constantes recherchées sont exactement les fonctions f_a , pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

EXERCICE 3

1. L'existence de la variance assure l'existence du moment d'ordre deux et de l'espérance de X . En particulier, l'inégalité $|t| \leq (1 + t^2)/2$ assure l'absolue convergence de l'espérance dès que $E(X^2) < +\infty$.

Comme X et $-X$ ont la même loi, elles ont la même espérance. Par linéarité, $E(-X) = -E(X)$. On a donc $E(X) = -E(X)$, d'où :

$$E(X) = 0, \quad E(X^2) = V(X) = \sigma^2 > 0.$$

2. (a) On calcule les probabilités ponctuelles de ZX en distinguant les deux valeurs de Z . Pour tout réel t , le système complet d'événements $[Z = 1]$, $[Z = -1]$ et l'indépendance donnent :

$$P(ZX = t) = P(Z = 1, X = t) + P(Z = -1, X = -t) = pP(X = t) + qP(X = -t).$$

La symétrie de X signifie notamment $P(X = -t) = P(X = t)$. Puisque $p + q = 1$, il vient $P(ZX = t) = P(X = t)$. Ces égalités ponctuelles caractérisent les lois discrètes : ZX et X ont donc la même loi.

2. (b) D'après 2. (a), ZX admet un moment d'ordre deux et :

$$E(ZX) = 0, \quad V(ZX) = \sigma^2.$$

Le produit $X(ZX) = ZX^2$ est intégrable, car $|ZX^2| = X^2$. Les variables Z et X^2 sont indépendantes puisque Z et X le sont. Elles admettent chacune une espérance ; l'espérance du produit se factorise donc :

$$E(ZX^2) = E(Z)E(X^2) = (p - q)\sigma^2.$$

La formule de la covariance donne :

$$\text{Cov}(X, ZX) = E(ZX^2) - E(X)E(ZX) = (p - q)\sigma^2.$$

Les deux variances sont strictement positives. Le coefficient de corrélation est donc défini et vaut :

$$\rho(X, ZX) = \frac{(p - q)\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2\sigma^2}} = p - q = 2p - 1.$$

Il ne dépend pas de σ^2 .

3. (a) Par définition de U et V , on a :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0, \\ 0 & \text{si } X = 0, \\ -1 & \text{si } X < 0. \end{cases}$$

Posons $r = P(X = 0)$. La symétrie de X donne $P(X > 0) = P(X < 0)$; ces deux probabilités ont pour somme $1 - r$. Ainsi :

Valeur de Y	-1	0	1
Probabilité	$(1 - r)/2$	r	$(1 - r)/2$

Les masses aux valeurs opposées sont égales. Par conséquent, Y et $-Y$ ont la même loi : Y est symétrique.

En outre, $E(Y) = 0$ et $V(Y) = E(Y^2) = 1 - r$. Puisque $\sigma^2 > 0$, X ne vaut pas zéro presque sûrement; donc $r < 1$ et $V(Y) > 0$.

3. (b) Question adaptée au programme actuel. La question doit distinguer le cas où la variance de $|X|$ s'annule : le coefficient demandé dans le PDF n'est alors pas défini.

Sur l'événement $[X > 0]$, $Y = 1$ et $Y|X| = X$; sur $[X < 0]$, $Y = -1$ et $Y|X| = -|X| = X$; sur $[X = 0]$, les deux membres sont nuls. On a donc l'identité ponctuelle :

$$X = Y|X|.$$

La variable $|X|$ admet un moment d'ordre deux, puisque $|X|^2 = X^2$. La variable Y est bornée. Toutes les espérances et variances qui suivent sont donc finies. Comme $E(X) = E(Y) = 0$, l'identité précédente donne :

$$\text{Cov}(Y, |X|) = E(Y|X|) - E(Y)E(|X|) = 0.$$

Posons $m = E(|X|)$. Alors :

$$V(|X|) = E(X^2) - m^2 = \sigma^2 - m^2.$$

On sait par 3. (a) que $V(Y) = 1 - r > 0$. Si $V(|X|) > 0$, le coefficient de corrélation est défini et :

$$\rho(Y, |X|) = \frac{0}{\sqrt{(1-r)(\sigma^2 - m^2)}} = 0.$$

Si $V(|X|) = 0$, la caractérisation des variables de variance nulle donne $|X| = m$ presque sûrement. Ce nombre m est strictement positif : s'il était nul, X serait nulle presque sûrement, en contradiction avec $\sigma^2 > 0$. En posant $c = m > 0$, la symétrie impose donc :

$$P(X = c) = P(X = -c) = \frac{1}{2}.$$

Réciproquement, cette loi rend $|X|$ constante de valeur c et sa variance est nulle. Dans ce cas, la covariance reste nulle, mais $\rho(Y, |X|)$ n'est pas défini. La loi donnant les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$ fournit notamment un contre-exemple à l'existence systématique du coefficient dans la formulation d'origine.

3. (c) On établit les deux implications de l'équivalence.

Supposons d'abord Y et $|X|$ indépendantes. Les événements $[Y = 0]$ et $[|X| = 0]$ sont tous deux égaux à $[X = 0]$. Leur indépendance entraîne :

$$r = P(Y = 0, |X| = 0) = P(Y = 0)P(|X| = 0) = r^2.$$

Ainsi $r \in \{0, 1\}$. Le cas $r = 1$ contredit $\sigma^2 > 0$. Il reste $r = 0$, c'est-à-dire $P(X = 0) = 0$.

Réciproquement, supposons $r = 0$. Alors $P(Y = 1) = P(Y = -1) = 1/2$. Pour tout réel $t > 0$, la symétrie de X donne :

$$P(|X| = t) = P(X = t) + P(X = -t) = 2P(X = t) = 2P(X = -t).$$

Les événements $[Y = 1, |X| = t]$ et $[Y = -1, |X| = t]$ valent respectivement $[X = t]$ et $[X = -t]$. On obtient donc :

$$P(Y = 1, |X| = t) = \frac{1}{2}P(|X| = t) = P(Y = 1)P(|X| = t),$$

$$P(Y = -1, |X| = t) = \frac{1}{2}P(|X| = t) = P(Y = -1)P(|X| = t).$$

Pour $t = 0$, les deux membres de ces égalités sont nuls puisque $r = 0$. Pour $t < 0$, ils sont nuls puisque $|X| \geq 0$. Si l'on prend la valeur 0 pour Y , les probabilités sont également nulles. Les probabilités ponctuelles du couple se factorisent donc pour toutes ses valeurs. Par le critère d'indépendance des variables discrètes, Y et $|X|$ sont indépendantes.

On a bien Y et $|X|$ indépendantes si et seulement si $P(X = 0) = 0$. En particulier, l'annulation de leur covariance obtenue en 3. (b) n'entraîne pas à elle seule leur indépendance.

Relevé des adaptations

- Exercice 3, 3. (b) : la demande de coefficient de corrélation est précisée pour distinguer son existence et le cas de variance nulle de $|X|$. L'hypothèse $V(X) > 0$ ne suffit pas à assurer $V(|X|) > 0$; si X prend les valeurs $-c$ et c avec probabilités égales, pour $c > 0$, le coefficient n'est pas défini. La covariance reste calculée dans tous les cas et aucune dépendance ultérieure n'est modifiée.