



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1987

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

Pour tout nombre entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_0^n e^{-x} x^n dx.$$

1. Calculer I_1 et I_2 .

2. Montrer que :

$$I_n = e^{-n} n^n \int_0^n e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

3. (a) Montrer que, pour tout élément x de l'intervalle $[0, 1[$:

$$\ln(1 - x) \leq -x - \frac{x^2}{2}.$$

3. (b) En déduire que, pour tout élément t de l'intervalle $[0, n]$:

$$e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t^2/(2n)}.$$

4. (a) Prouver que :

$$\frac{e^n}{n^n} I_n \leq \sqrt{2n} \int_0^{\sqrt{n/2}} e^{-u^2} du.$$

4. (b) Montrer que, pour tout élément u de l'intervalle $[1, +\infty[$:

$$e^{-u^2} \leq e^{-u}.$$

En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\frac{e^n}{n^{n+1}} I_n$.

EXERCICE 2

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4.

On considère l'application f qui à tout élément P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = (X - 1)P'(X) - P(X),$$

où P' est le polynôme dérivé de P .

1. Montrer que f définit un endomorphisme de E .
2. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E . Écrire la matrice associée à f dans cette base.
3. Déterminer les éléments du noyau de f . En déduire le rang de f .
4. Déterminer les éléments de l'image de f .
5. On considère l'application $f^2 = f \circ f$.
5. (a) Pour tout élément P de E , exprimer $f^2(P)$ à l'aide de P , P' et P'' .
5. (b) Écrire la matrice associée à f^2 dans la base $\mathcal{B}$.
5. (c) Déterminer le noyau de f^2 . En déduire le rang de f^2 .

EXERCICE 3

Trois boules de couleurs différentes sont réparties dans deux urnes U_1 et U_2 . On effectue une succession de tirages au hasard dans l'ensemble des couleurs ; chaque couleur a la même probabilité d'être tirée et les tirages sont indépendants. À l'issue de chaque tirage, la boule dont la couleur a été tirée est changée d'urne.

On suppose que le nombre de boules situées dans l'urne U_1 avant le premier tirage est aléatoire et représenté par la variable aléatoire X_0 . Les tirages de couleurs sont indépendants de la répartition initiale. Pour tout nombre entier naturel non nul n , on note X_n le nombre de boules situées dans l'urne U_1 après le n -ième tirage. Les variables aléatoires X_n , où $n \geq 0$, prennent leurs valeurs dans l'ensemble $I = \{0, 1, 2, 3\}$.

Pour chaque état initial fixé $i \in I$, on peut considérer le même mécanisme commencé avec i boules dans U_1 . Les probabilités de transition demandées pour cet état désignent celles de ce mécanisme ; elles coïncident avec les probabilités conditionnelles sachant $X_0 = i$ lorsque $P(X_0 = i) > 0$. La même convention s'applique à un état fixé à un instant ultérieur.

1. (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de I , calculer la probabilité de transition p_{ij} pour que $X_1 = j$ lorsque $X_0 = i$. On écrira les résultats sous la forme d'une matrice $P = (p_{ij})$, les lignes et les colonnes étant rangées dans l'ordre 0, 1, 2, 3, et on vérifiera que, pour tout élément i de I :

$$\sum_{j=0}^3 p_{ij} = 1.$$

1. (b) On suppose que la loi de probabilité de X_0 est une loi binomiale de paramètres $(3, \frac{1}{2})$, notée $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$. Quelle est la loi de probabilité de X_1 ?
2. (a) Expliquer pourquoi la probabilité de transition que $X_2 = j$ lorsque $X_1 = i$ vaut encore p_{ij} .
2. (b) Pour tout couple (i, j) d'éléments de I , on note $p_{ij}^{(2)}$ la probabilité que $X_2 = j$ lorsque $X_0 = i$. Montrer que :

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^3 p_{ik} p_{kj}.$$

En déduire les valeurs des nombres $p_{ij}^{(2)}$, où $(i, j) \in I^2$, qu'on écrira sous forme d'une

matrice $P_2 = (p_{ij}^{(2)})$. Pour tout élément i de I , calculer

$$\sum_{j=0}^3 p_{ij}^{(2)}.$$

2. (c) La loi de X_0 étant encore la loi $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$, trouver celle de X_2 .
3. Soit, pour tout nombre entier naturel non nul n , $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité que $X_n = j$ lorsque $X_0 = i$. Exprimer la matrice $P_n = (p_{ij}^{(n)})$ à l'aide de P . Trouver la loi de X_n quand la loi de X_0 est $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$.
4. On note A_n l'événement $(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \dots, X_{n-1} \neq 0, X_n = 0)$ et q_{in} sa probabilité lorsque $X_0 = i$. Pour $n = 1$, on a simplement $A_1 = (X_1 = 0)$. Calculer, pour tout entier i de I , les valeurs de q_{in} pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.