



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1987

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. Les intégrandes sont continues sur les segments considérés ; les intégrales existent.

Une intégration par parties donne :

$$I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}.$$

Pour la seconde intégrale, une première intégration par parties fournit :

$$I_2 = [-x^2e^{-x}]_0^2 + 2 \int_0^2 xe^{-x} dx.$$

Or, par le même calcul que précédemment,

$$\int_0^2 xe^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^2 = 1 - 3e^{-2}.$$

Ainsi :

$$I_2 = -4e^{-2} + 2(1 - 3e^{-2}) = 2 - \frac{10}{e^2}.$$

2. Effectuons le changement de variable affine $t = n - x$. Lorsque x va de 0 à n , t va de n à 0, et $dx = -dt$. Ainsi :

$$I_n = \int_n^0 e^{-(n-t)}(n-t)^n(-dt) = e^{-n}n^n \int_0^n e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Le changement de variable est effectué sur un segment, avec une application affine bijective ; toutes les fonctions intégrées sont continues.

3. (a) Méthode 1 — Étude d'une différence.

La fonction $h : x \mapsto \ln(1-x) + x + x^2/2$ est dérivable sur $[0, 1[$, avec une dérivée à droite en 0. Pour $0 \leq x < 1$:

$$h'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + x = -\frac{x^2}{1-x} \leq 0.$$

Elle est donc décroissante sur cet intervalle. Comme $h(0) = 0$, on obtient $h(x) \leq 0$, c'est-à-dire :

$$\ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2}.$$

Méthode 2 — Comparaison de primitives.

Pour $0 \leq v < 1$, on a :

$$\frac{1}{1-v} - (1+v) = \frac{v^2}{1-v} \geq 0.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et x , puis en changeant les signes :

$$\ln(1-x) = - \int_0^x \frac{dv}{1-v} \leq - \int_0^x (1+v) dv = -x - \frac{x^2}{2}.$$

Les deux preuves reposent sur une inégalité élémentaire de même signe. La première convient à l'étude systématique d'une différence ; la seconde explique directement l'origine des deux termes du majorant.

3. (b) Pour $0 \leq t < n$, on peut appliquer la question précédente à $x = t/n$. En multipliant par $n > 0$ puis en ajoutant t , il vient :

$$t + n \ln \left(1 - \frac{t}{n} \right) \leq -\frac{t^2}{2n}.$$

L'exponentielle est croissante ; par conséquent :

$$e^t \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n = \exp \left(t + n \ln \left(1 - \frac{t}{n} \right) \right) \leq e^{-t^2/(2n)}.$$

Lorsque $t = n$, le membre de gauche vaut $e^n 0^n = 0$, puisque $n \geq 1$, tandis que celui de droite vaut $e^{-n/2} > 0$. L'inégalité est donc valable sur tout $[0, n]$, sans prendre de logarithme de zéro.

4. (a) Les deux intégrandes sont continues et positives sur $[0, n]$. En utilisant 2 et 3. (b), on obtient :

$$0 \leq \frac{e^n}{n^n} I_n = \int_0^n e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \leq \int_0^n e^{-t^2/(2n)} dt.$$

Le changement de variable affine $u = t/\sqrt{2n}$ donne $dt = \sqrt{2n} du$, avec bornes 0 et $\sqrt{n/2}$. Il en résulte :

$$\frac{e^n}{n^n} I_n \leq \sqrt{2n} \int_0^{\sqrt{n/2}} e^{-u^2} du.$$

4. (b) Pour $u \geq 1$, $u^2 \geq u$, donc $-u^2 \leq -u$. Par croissance de l'exponentielle :

$$e^{-u^2} \leq e^{-u}.$$

Pour tout réel $a \geq 0$, l'intégrale $\int_0^a e^{-u^2} du$ est majorée par une constante indépendante de a . En effet, si $a \leq 1$, elle est au plus 1. Si $a > 1$, on utilise Chasles et l'inégalité précédente :

$$\int_0^a e^{-u^2} du \leq 1 + \int_1^a e^{-u} du = 1 + e^{-1} - e^{-a} \leq 1 + e^{-1}.$$

En divisant le résultat de 4. (a) par $n > 0$, on en déduit :

$$0 \leq \frac{e^n}{n^{n+1}} I_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} (1 + e^{-1}).$$

Le membre de droite tend vers 0. Le théorème d'encadrement donne donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^{n+1}} I_n = 0.$$

Cette preuve n'exige ni calcul de l'intégrale sur $[0, +\infty[$ ni formule asymptotique pour les factorielles.

EXERCICE 2

1. Si P est de degré au plus 4, alors P' est de degré au plus 3, et $(X - 1)P' - P$ est de degré au plus 4. Ainsi $f(P) \in E$, y compris pour le polynôme nul.

La dérivation et les opérations sur les polynômes sont linéaires : pour $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha P + \beta Q) = (X - 1)(\alpha P' + \beta Q') - \alpha P - \beta Q = \alpha f(P) + \beta f(Q).$$

L'application f est donc linéaire de E dans lui-même : c'est un endomorphisme de l'espace de dimension 5.

2. Calculons l'image de chaque vecteur de la base :

$$f(1) = -1, \quad f(X) = -1,$$

$$f(X^2) = X^2 - 2X, \quad f(X^3) = 2X^3 - 3X^2, \quad f(X^4) = 3X^4 - 4X^3.$$

Les colonnes de la matrice sont leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$. Ainsi :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Méthode 1 — Résolution du système matriciel.

Écrivons $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$. La condition $f(P) = 0$ équivaut, d'après la matrice précédente, à :

$$-a - b = 0, \quad -2c = 0, \quad c - 3d = 0, \quad 2d - 4e = 0, \quad 3e = 0.$$

Elle donne $c = d = e = 0$ et $a = -b$. Réciproquement, ces conditions annulent bien $f(P)$. On a donc :

$$\text{Ker } f = \{b(X - 1) : b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X - 1).$$

Le polynôme $X - 1$ n'est pas nul, donc $\dim(\text{Ker } f) = 1$. Le théorème du rang, applicable à $f : E \rightarrow E$ avec $\dim E = 5$, donne :

$$\text{rg } f = 5 - 1 = 4.$$

Méthode 2 — Choix d'une base adaptée.

La famille $\mathcal{C} = (1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3, (X - 1)^4)$ est une base de E . Pour le vérifier, une combinaison nulle de ces polynômes impose successivement la nullité du coefficient de degré 4, puis de degré 3, puis de degré 2, puis de degré 1, puis de la constante. La famille est donc libre et comporte $5 = \dim E$ éléments.

Pour $k = 0, \dots, 4$, la définition de f donne :

$$f((X - 1)^k) = (k - 1)(X - 1)^k.$$

La formule est aussi vraie pour $k = 0$, en dérivant la constante 1. La matrice de f dans $\mathcal{C}$ est donc $\text{diag}(-1, 0, 1, 2, 3)$. Seule la coordonnée de $X - 1$ peut être non nulle dans un élément du noyau ; les quatre autres coordonnées sont annulées. On retrouve le même noyau et le rang 4.

La première méthode exploite la matrice déjà calculée. La seconde simplifie simultanément les questions sur l'image et sur la composée.

4. Méthode 1 — Images des vecteurs d'une base.

L'image de f est engendrée par $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3), f(X^4)$. Les deux premières

images sont égales, et les quatre polynômes suivants ont des degrés distincts et des coefficients dominants non nuls :

$$1, \quad X^2 - 2X, \quad 2X^3 - 3X^2, \quad 3X^4 - 4X^3.$$

Ils sont libres : dans une combinaison nulle, l'examen successif des degrés 4, 3, 2, 0 impose tous les coefficients nuls. Ils forment donc une base de l'image, conformément au rang 4 :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(1, X^2 - 2X, 2X^3 - 3X^2, 3X^4 - 4X^3).$$

Méthode 2 — Une condition sur la dérivée en un point.

Pour tout $P \in E$, la règle de dérivation d'un produit donne :

$$(f(P))' = P' + (X - 1)P'' - P' = (X - 1)P''.$$

Ainsi tout polynôme Q de l'image vérifie $Q'(1) = 0$. Posons $H = \{Q \in E : Q'(1) = 0\}$. Si $Q = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$, cette condition s'écrit :

$$b + 2c + 3d + 4e = 0.$$

Le coefficient b est donc déterminé par c, d, e , tandis que a, c, d, e sont libres. Cela montre $\dim H = 4$. L'inclusion $\text{Im } f \subset H$ et l'égalité des dimensions prouvent :

$$\text{Im } f = \{Q \in E : Q'(1) = 0\}.$$

Cette caractérisation permet de décider directement si un polynôme appartient à l'image. Dans la base $\mathcal{C}$ de 3, elle équivaut également à :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(1, (X - 1)^2, (X - 1)^3, (X - 1)^4).$$

En effet, la dérivée en 1 d'une combinaison de ces quatre polynômes est nulle ; ces polynômes sont libres et forment une famille de quatre éléments de l'image.

5. On utilise dans les trois sous-questions la composée $f^2 = f \circ f$, dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A^2 .

5. (a) On a déjà établi $(f(P))' = (X - 1)P''$. En appliquant la définition de f au polynôme $f(P)$:

$$f^2(P) = (X - 1)(f(P))' - f(P).$$

Ainsi :

$$f^2(P) = (X - 1)^2 P'' - (X - 1)P' + P.$$

Cette expression est valable pour tout $P \in E$.

5. (b) Le lien entre composition et multiplication matricielle donne :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pour expliciter les colonnes et contrôler ce produit, la formule de 5. (a) donne :

$$f^2(1) = 1, \quad f^2(X) = 1, \quad f^2(X^2) = 2 - 2X + X^2,$$

$$f^2(X^3) = 6X - 9X^2 + 4X^3, \quad f^2(X^4) = 12X^2 - 20X^3 + 9X^4.$$

5. (c) Méthode 1 — Résolution à partir de A^2 .

Pour $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$, la condition $f^2(P) = 0$ est :

$$a + b + 2c = 0, \quad -2c + 6d = 0, \quad c - 9d + 12e = 0, \quad 4d - 20e = 0, \quad 9e = 0.$$

La dernière équation donne $e = 0$, puis la précédente donne $d = 0$. On obtient ensuite $c = 0$ et $a = -b$. Réciproquement, ces conditions suffisent. Donc :

$$\text{Ker } f^2 = \text{Vect}(X - 1).$$

Son noyau a dimension 1, et le théorème du rang donne $\text{rg } f^2 = 4$.

Méthode 2 — La matrice diagonale dans $\mathcal{C}$.

Dans la base adaptée construite en 3, la matrice de f^2 est le carré de celle de f , soit $\text{diag}(1, 0, 1, 4, 9)$. Pour une combinaison

$$\sum_{k=0}^4 a_k (X - 1)^k,$$

son image par f^2 est donc :

$$a_0 + a_2(X - 1)^2 + 4a_3(X - 1)^3 + 9a_4(X - 1)^4.$$

Comme $\mathcal{C}$ est libre, cette image est nulle exactement si $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. La coordonnée a_1 est libre. Cela redonne $\text{Ker } f^2 = \text{Vect}(X - 1)$ et le rang 4.

Les deux méthodes montrent ici que la composition par f ne crée pas de nouveaux éléments du noyau ; cette conclusion a été établie pour cet endomorphisme particulier, sans invoquer de résultat général supplémentaire.

EXERCICE 3

On range les états dans l'ordre 0, 1, 2, 3. On emploie la convention des matrices lignes de probabilités : si $V_n = (P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3))$, l'évolution s'écrit $V_{n+1} = V_n P$.

Question adaptée au programme actuel, préambule et probabilités de transition : l'indépendance des tirages avec la répartition initiale est explicitée. Les transitions sont définies par le mécanisme à partir d'un état fixé ; un conditionnement ordinaire n'est utilisé que si l'événement conditionnant est de probabilité strictement positive.

1. (a) Lorsqu'il y a i boules dans U_1 , tirer la couleur de l'une de ces i boules diminue ce nombre de 1. Les couleurs étant équiprobables, cette transition a probabilité $i/3$. Tirer l'une des $3 - i$ autres couleurs l'augmente de 1, avec probabilité $(3 - i)/3$.

Il n'existe aucune autre transition. En particulier, à partir de 0 on passe nécessairement à 1, et à partir de 3 on passe nécessairement à 2. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous ses coefficients sont positifs ou nuls. Pour $i = 1, 2$, la somme des coefficients de la ligne vaut $i/3 + (3 - i)/3 = 1$; pour les lignes $i = 0, 3$, elle vaut également 1. Ainsi

$$\sum_{j=0}^3 p_{ij} = 1$$

pour tout $i \in I$.

1. (b) La loi binomiale initiale donne :

$$V_0 = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right).$$

La formule des probabilités totales s'applique aux quatre événements $(X_0 = i)$, tous de probabilité strictement positive. Leurs probabilités de transition sont celles de 1. (a).

Calculons chaque coordonnée :

$$P(X_1 = 0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8},$$

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{8},$$

$$P(X_1 = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8},$$

$$P(X_1 = 3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

On a donc $V_1 = V_0 P = V_0$, et :

$$X_1 \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right).$$

La ligne V_0 , dont les coefficients sont positifs et de somme 1, est ainsi un état stable.

2. (a) À l'instant du deuxième tirage, si $X_1 = i$, exactement i couleurs correspondent à des boules de U_1 . Le deuxième tirage est indépendant de la répartition initiale et du premier tirage ; il reste uniforme sur les trois couleurs. La probabilité de passer à $i - 1$ est donc $i/3$, et celle de passer à $i + 1$ est $(3 - i)/3$, avec les mêmes transitions aux bords qu'en 1. (a).

La probabilité de passer de i à j vaut donc encore p_{ij} . Plus généralement, le même argument s'applique après n'importe quel nombre de tirages : une fois l'état présent connu, les transitions ne dépendent pas du chemin suivi pour y parvenir.

2. (b) Fixons un état initial i . L'événement $(X_2 = j)$ est la réunion disjointe des événements $(X_1 = k, X_2 = j)$, pour $k \in I$. Si $p_{ik} > 0$, la formule des probabilités composées et 2. (a) donnent la probabilité $p_{ik}p_{kj}$ à ce chemin en deux étapes.

Si $p_{ik} = 0$, l'événement $(X_1 = k)$ est impossible dans ce mécanisme ; sa contribution est nulle. On ne le prend pas comme événement conditionnant. En sommant les quatre contributions :

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^3 p_{ik}p_{kj}.$$

Il s'agit exactement du coefficient de ligne i et colonne j du produit matriciel P^2 , donc

$P_2 = P^2$. Le calcul donne :

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $p_{11}^{(2)} = p_{10}p_{01} + p_{12}p_{21} = 1/3 + 4/9 = 7/9$ et $p_{13}^{(2)} = p_{12}p_{23} = 2/9$. Depuis l'état 0, la première étape mène à 1, d'où la première ligne égale à la ligne 1 de P . Depuis 3, elle mène à 2, d'où la dernière ligne égale à la ligne 2 de P . Depuis 2, les probabilités non nulles sont $p_{20}^{(2)} = p_{21}p_{10} = 2/9$ et $p_{22}^{(2)} = p_{21}p_{12} + p_{23}p_{32} = 4/9 + 1/3 = 7/9$.

Les quatre sommes de lignes sont :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \quad \frac{7}{9} + \frac{2}{9} = 1, \quad \frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1, \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

On peut aussi justifier cette propriété sans recalculer les coefficients, puisque les sommes sont finies :

$$\sum_{j=0}^3 p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^3 p_{ik} \left(\sum_{j=0}^3 p_{kj} \right) = \sum_{k=0}^3 p_{ik} = 1.$$

2. (c) D'après 1. (b), X_1 suit déjà $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$. Les transitions étant inchangées, la même formule des probabilités totales donne :

$$V_2 = V_1 P = V_0 P = V_0.$$

On peut également écrire $V_2 = V_0 P_2 = V_0 P^2 = (V_0 P) P = V_0$. Ainsi :

$$X_2 \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right).$$

3. En décomposant un chemin à son état à l'instant n , puis en utilisant l'indépendance du tirage suivant, on obtient, pour tout $n \geq 1$:

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^3 p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

Comme en 2. (b), un état intermédiaire de probabilité nulle apporte une contribution nulle et ne sert pas de conditionnement. Sous forme matricielle, $P_{n+1} = P_n P$. Or $P_1 = P$. Une récurrence donne donc :

$$P_n = P^n \quad (n \geq 1).$$

Pour la loi initiale binomiale, on a déjà établi $V_0 P = V_0$. Par récurrence, si $V_n = V_0$, alors $V_{n+1} = V_n P = V_0 P = V_0$. La propriété est vraie au rang 0 ; elle l'est donc pour tout entier $n \geq 0$:

$$V_n = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right), \quad X_n \sim \mathcal{B} \left(3, \frac{1}{2} \right).$$

Il s'agit d'une invariance de la loi pour cet état initial. Il n'est pas nécessaire d'étudier une convergence des lois depuis d'autres états initiaux.

4. L'événement A_n impose que le premier passage à l'état 0 après l'instant initial ait lieu au temps n . Il n'impose pas $X_0 \neq 0$: pour $i = 0$, on cherche donc le premier retour à un instant strictement positif.

Méthode 1 — Énumération des chemins possibles.

Pour $n = 1$, seule la transition $1 \rightarrow 0$ est possible. Elle a probabilité $1/3$. Ainsi :

$$(q_{01}, q_{11}, q_{21}, q_{31}) = \left(0, \frac{1}{3}, 0, 0 \right).$$

Pour $n = 2$, l'état à l'instant 1 doit être 1, puisque seul 1 peut être suivi de 0. Les chemins possibles sont $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ et $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$. Ils ne passent pas par 0 à l'instant 1. Leurs probabilités respectives sont $1 \cdot (1/3) = 1/3$ et $(2/3)(1/3) = 2/9$. Aucun chemin en deux étapes ne convient depuis 1 ou 3. On obtient :

$$(q_{02}, q_{12}, q_{22}, q_{32}) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{9}, 0\right).$$

Pour $n = 3$, les deux derniers états avant l'arrivée doivent être 2 puis 1 : l'état à l'instant 2 doit être 1, et l'état à l'instant 1 ne peut pas être 0, donc il doit être 2. Les chemins sont alors $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ et $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$. Leurs probabilités, par la règle des probabilités composées et l'indépendance des tirages, valent :

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}, \quad 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Il n'existe aucun autre chemin admissible en trois étapes. Donc :

$$(q_{03}, q_{13}, q_{23}, q_{33}) = \left(0, \frac{4}{27}, 0, \frac{2}{9}\right).$$

Méthode 2 — Récurrence sur le premier tirage.

On a $q_{i1} = p_{i0}$. Pour un temps d'arrivée $n + 1 \geq 2$, le premier pas doit aboutir à un état $k \neq 0$. Après ce premier pas, il reste à atteindre 0 pour la première fois en n étapes à partir de k . Les tirages ultérieurs sont indépendants du premier. La décomposition selon cet état donne :

$$q_{i,n+1} = \sum_{k=1}^3 p_{ik} q_{kn}.$$

Pour $n = 1$, seul $q_{11} = 1/3$ est non nul, donc $q_{i2} = p_{i1}/3$, ce qui donne $(1/3, 0, 2/9, 0)$.

Pour $n = 2$, parmi les indices $k = 1, 2, 3$, seul $q_{22} = 2/9$ est non nul, donc $q_{i3} = (2/9)p_{i2}$, ce qui donne $(0, 4/27, 0, 2/9)$.

Les deux méthodes aboutissent au tableau suivant. L'énumération est immédiate pour ces petites valeurs ; la récurrence permet de prolonger le calcul à d'autres instants.

État initial i	q_{i1}	q_{i2}	q_{i3}
0	0	$\frac{1}{3}$	0

État initial i	q_{i1}	q_{i2}	q_{i3}
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{27}$
2	0	$\frac{2}{9}$	0
3	0	0	$\frac{2}{9}$

Relevé des adaptations

- Exercice 3, préambule : indépendance des tirages avec la répartition initiale explicitée, pour justifier les transitions lorsque cette répartition est aléatoire.
- Exercice 3, 1. (a), 2. (a), 2. (b), 3 et 4 : probabilités définies par le même mécanisme à partir d'un état fixé ; elles sont identifiées aux probabilités conditionnelles lorsque l'événement conditionnant est de probabilité strictement positive. Cette précision conserve le modèle et évite de conditionner par un événement de probabilité nulle.
- Exercice 3, 4 : la convention $A_1 = (X_1 = 0)$, déjà contenue dans la définition originale, est explicitée ; aucun changement de l'événement étudié.