



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1986

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres λ et μ de M ; on notera λ celle de ces valeurs propres qui a la plus grande valeur absolue. Montrer que $\lambda\mu = -1$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n , calculer la matrice M^n .

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Pour tout nombre entier naturel n , on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) Pour tout nombre entier naturel n ,

$$(1) \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} + u_n.$$

- (b) Pour tout entier naturel n ,

$$(2) \quad X_{n+1} = MX_n.$$

3. Soit α un nombre réel. On note $(u_n(\alpha))$ l'unique suite satisfaisant aux conditions équivalentes précédentes et telle que $u_0(\alpha) = 1$ et $u_1(\alpha) = \alpha$.

Exprimer $u_n(\alpha)$ en fonction de α , λ , μ et n .

4. Montrer que la suite $(u_n(\alpha))$ est convergente si et seulement si $\alpha = \mu$; déterminer alors la limite de cette suite.

5. Soit μ' une valeur décimale approchée de μ à la précision 10^{-p} , où $p \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, $\mu' = \mu + \delta$, où $|\delta| \leq 10^{-p}$. On se propose d'examiner si $u_n(\mu')$, que l'on calcule par récurrence à l'aide d'une calculatrice grâce à la relation (1), fournit une bonne approximation de $u_n(\mu)$.
5. (a) Dans cette question, on prend $\mu' = -0,09902$, valeur approchée de μ à la précision 10^{-4} . À l'aide de la calculatrice, calculer $u_n(\mu')$ pour $2 \leq n \leq 10$. Exprimer d'autre part $u_n(\mu)$ en fonction de λ et de n ; à partir de cette relation, calculer les valeurs décimales approchées de $u_n(\mu)$ pour $2 \leq n \leq 10$.
5. (b) Exprimer $u_n(\mu') - u_n(\mu)$ en fonction de λ, μ, δ et n . En déduire l'ordre de grandeur de $u_{10}(\mu') - u_{10}(\mu)$ lorsqu'on prend pour μ' la valeur approchée définie au a).

Expliquer ainsi le phénomène observé à la question a).

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par la relation

$$f_n(x) = \frac{x - n}{x + n} - e^{-x}.$$

1. Étudier la variation de la fonction f_n .
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution u_n et une seule.
3. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) .
 3. (a) En étudiant le signe de $f_n(n)$, montrer que $u_n > n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
 3. (b) Montrer que $f_n(n+1)$ est positif à partir d'un certain rang. En déduire la limite de $\frac{u_n}{n}$.

3. (c) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = 0.$$

On pourra étudier le signe de $f_n(n + \varepsilon)$, où ε est un nombre réel strictement positif.

4. On se propose d'étudier la suite de terme général $a_n = u_n - n$. Expliciter la relation $f_n(n + a_n) = 0$. En déduire la limite de $\frac{e^n}{n} a_n$.

EXERCICE 3

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note I l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I . Pour tout entier i de I , on note p_i la probabilité que X prenne la valeur i ; on suppose que $p_i > 0$.

On pose enfin

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{1}{p_i}.$$

1. Montrer que la quantité $H(X)$ est strictement positive. Quelle est sa valeur lorsque X suit une loi uniforme sur I ?
2. Soit $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ une suite de n nombres réels strictement positifs telle que

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1.$$

2. (a) Vérifier que, pour tout nombre réel strictement positif x ,

$$\ln x \leq x - 1.$$

2. (b) En déduire que

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq 0.$$

Dans quel cas le premier membre est-il nul ?

2. (c) Montrer que $H(X) \leq \ln n$. Caractériser le cas où il y a égalité.

3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $I \times I$. Pour tout élément (i, j) de $I \times I$, on note r_{ij} la probabilité que X prenne la valeur i et Y la valeur j ; on suppose que $r_{ij} > 0$. On note respectivement $(p_i)_{i \in I}$ et $(q_j)_{j \in I}$ les lois marginales de X et de Y . On pose

$$H(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \ln \frac{1}{r_{ij}}.$$