



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques III — Option économique

1986

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE 1

1. Cherchons les éléments propres par les équations sur les coordonnées. Si r est une

valeur propre et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé, alors

$$10a + b = ra, \quad a = rb.$$

On a nécessairement $b \neq 0$, car $b = 0$ entraînerait $a = 0$. En substituant $a = rb$ dans la première égalité, on obtient

$$r^2 - 10r - 1 = 0.$$

Réciproquement, pour toute racine réelle r de cette équation, le vecteur non nul $\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie

$$M \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux racines sont donc exactement les valeurs propres :

$$\lambda = 5 + \sqrt{26}, \quad \mu = 5 - \sqrt{26}.$$

Comme $5 < \sqrt{26} < 6$, on a $\lambda > 10$, $-1 < \mu < 0$ et $|\mu| = \sqrt{26} - 5 < \lambda$. L'attribution des notations demandées est respectée. De plus,

$$\lambda\mu = 25 - 26 = -1, \quad \lambda + \mu = 10, \quad \lambda - \mu = 2\sqrt{26}.$$

Les deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres distinctes sont indépendants. Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

vérifient $MP = PD$, et P est inversible. Son inverse, que l'on peut contrôler par multiplication, est

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit, pour tout entier $n \geq 1$, que $M^n = PD^nP^{-1}$. En effectuant les produits,

$$M^n = \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} - \mu^{n+1} & -\mu\lambda^{n+1} + \lambda\mu^{n+1} \\ \lambda^n - \mu^n & -\mu\lambda^n + \lambda\mu^n \end{pmatrix}.$$

L'identité $\lambda\mu = -1$ donne $-\mu\lambda^{n+1} = \lambda^n$, $\lambda\mu^{n+1} = -\mu^n$, $-\mu\lambda^n = \lambda^{n-1}$ et $\lambda\mu^n = -\mu^{n-1}$. Finalement,

$$M^n = \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} - \mu^{n+1} & \lambda^n - \mu^n \\ \lambda^n - \mu^n & \lambda^{n-1} - \mu^{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit matriciel vaut

$$MX_n = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Les secondes coordonnées sont identiques sans

condition supplémentaire. L'égalité des premières coordonnées est exactement $u_{n+2} = 10u_{n+1} + u_n$. Pour chaque n , les deux égalités sont donc équivalentes ; elles le restent lorsqu'on les impose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Les valeurs initiales déterminent successivement tous les termes par la récurrence : la suite existe et est unique.

Méthode 1 — Utilisation de la matrice

La relation matricielle donne par récurrence $X_n = M^n X_0$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $n \geq 1$,

la seconde coordonnée et la formule de la question 1 donnent

$$u_n(\alpha) = \frac{\alpha(\lambda^n - \mu^n) + \lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu}.$$

Comme $\lambda^{n-1} = -\mu\lambda^n$ et $\mu^{n-1} = -\lambda\mu^n$, on obtient

$$u_n(\alpha) = \frac{\alpha - \mu}{\lambda - \mu} \lambda^n + \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \mu} \mu^n.$$

Cette formule vaut aussi pour $n = 0$, puisque la somme de ses deux coefficients est 1. Elle constitue donc l'expression demandée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Résolution directe de la récurrence

Les deux suites (λ^n) et (μ^n) satisfont à la récurrence, puisque leurs raisons vérifient $r^2 = 10r + 1$. Cherchons une suite de la forme $v_n = A\lambda^n + B\mu^n$ avec les valeurs initiales voulues. Les conditions sont

$$A + B = 1, \quad A\lambda + B\mu = \alpha.$$

En remplaçant B par $1 - A$, on obtient $A(\lambda - \mu) = \alpha - \mu$. Le dénominateur est non nul, donc

$$A = \frac{\alpha - \mu}{\lambda - \mu}, \quad B = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \mu}.$$

La suite ainsi construite satisfait à la même récurrence et aux mêmes valeurs initiales que $(u_n(\alpha))$. Par unicité, elles sont identiques, ce qui redonne la formule précédente. La première méthode réutilise le calcul des puissances ; la seconde évite le calcul matriciel lorsque seule la suite scalaire est recherchée.

4. Méthode 1 — Étude de l'expression explicite

Dans la formule de la question 3, on a $\mu^n \rightarrow 0$ parce que $|\mu| < 1$, tandis que $\lambda^n \rightarrow +\infty$ parce que $\lambda > 1$. Si $\alpha \neq \mu$, le coefficient $A = (\alpha - \mu)/(\lambda - \mu)$ est non nul. Le terme $A\lambda^n$ tend alors vers $+\infty$ si $\alpha > \mu$, et vers $-\infty$ si $\alpha < \mu$. Le second terme tendant vers zéro, la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Si $\alpha = \mu$, la formule se réduit à $u_n(\mu) = \mu^n$, qui tend vers zéro. Ainsi,

$$(u_n(\alpha)) \text{ converge} \iff \alpha = \mu, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\mu) = 0.$$

Méthode 2 — Mise en évidence d'une suite géométrique

Posons $v_n = u_{n+1}(\alpha) - \mu u_n(\alpha)$. En utilisant la récurrence, puis $10 - \mu = \lambda$ et $-\lambda\mu = 1$, on calcule

$$v_{n+1} = (10 - \mu)u_{n+1}(\alpha) + u_n(\alpha) = \lambda(u_{n+1}(\alpha) - \mu u_n(\alpha)) = \lambda v_n.$$

Comme $v_0 = \alpha - \mu$, il vient $v_n = (\alpha - \mu)\lambda^n$. Si $(u_n(\alpha))$ convergait vers un réel L , alors (v_n) convergerait vers $(1 - \mu)L$. Cela est impossible pour $\alpha \neq \mu$ puisque $\lambda > 1$.

Pour $\alpha = \mu$, on a $v_n = 0$ pour tout n , donc $u_{n+1}(\mu) = \mu u_n(\mu)$. Avec $u_0(\mu) = 1$, cela donne

$u_n(\mu) = \mu^n \rightarrow 0$. Cette seconde méthode détecte directement le terme instable sans partir de la formule explicite.

5. (a) En partant de $u_0(\mu') = 1$ et $u_1(\mu') = -0,09902$, les deux premières étapes sont

$$u_2(\mu') = 10(-0,09902) + 1 = 0,00980,$$

$$u_3(\mu') = 10(0,00980) - 0,09902 = -0,00102.$$

En poursuivant la même récurrence, on obtient les valeurs de la deuxième colonne ci-dessous. Pour la suite exacte, la question 4 et $\lambda\mu = -1$ donnent

$$u_n(\mu) = \mu^n = (-1)^n \lambda^{-n}.$$

Cette expression fournit les valeurs approchées de la troisième colonne, arrondies à six chiffres significatifs.

n	$u_n(\mu')$	$u_n(\mu)$ approché
2	0,00980	$9,80486 \times 10^{-3}$
3	-0,00102	$-9,70873 \times 10^{-4}$
4	-0,00040	$9,61354 \times 10^{-5}$
5	-0,00502	$-9,51928 \times 10^{-6}$
6	-0,05060	$9,42594 \times 10^{-7}$
7	-0,51102	$-9,33352 \times 10^{-8}$
8	-5,16080	$9,24201 \times 10^{-9}$
9	-52,11902	$-9,15139 \times 10^{-10}$
10	-526,35100	$9,06166 \times 10^{-11}$

Les valeurs de $u_n(\mu')$ indiquées sont les valeurs exactes de la récurrence initialisée avec le décimal donné, avant tout arrondi supplémentaire. Dès le rang 4, le signe diffère de celui du terme exact; ensuite, la valeur absolue calculée croît fortement, alors que le terme exact reste très petit.

5. (b) La formule de la question 3, utilisée avec $\alpha = \mu + \delta$ et avec $\alpha = \mu$, donne exactement

$$u_n(\mu') - u_n(\mu) = \frac{\delta}{\lambda - \mu}(\lambda^n - \mu^n).$$

En particulier, si $|\delta| \leq 10^{-p}$, alors

$$|u_n(\mu') - u_n(\mu)| \leq \frac{10^{-p}}{\lambda - \mu}(\lambda^n + |\mu|^n).$$

Pour la valeur de a), on a

$$\mu \simeq -0,0990195135927848, \quad \delta \simeq -4,8640721517 \times 10^{-7}.$$

Au rang 10, la valeur exacte approchée vaut $9,0616625733 \times 10^{-11}$ et le calcul par récurrence donne $-526,35100$. Par soustraction,

$$u_{10}(\mu') - u_{10}(\mu) \simeq -526,351000000091.$$

L'erreur est donc de plusieurs centaines, environ $5,26 \times 10^2$ en valeur absolue, malgré une erreur initiale inférieure à 5×10^{-7} . L'écart est amplifié par le facteur $(\lambda^n - \mu^n)/(\lambda - \mu)$, qui croît comme une puissance de $\lambda > 10$. La petite erreur d'initialisation introduit ainsi un terme croissant qui masque rapidement la suite exacte μ^n : la récurrence ne fournit pas une bonne approximation dans ce cas.

EXERCICE 2

1. Fixons $n \geq 1$. Puisque $x + n \geq n > 0$ pour $x \geq 0$, la fonction est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$. Sur cet intervalle, sa dérivée, à droite en zéro, vaut

$$f'_n(x) = \frac{(x+n) - (x-n)}{(x+n)^2} + e^{-x} = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0.$$

Ainsi f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Aux bornes,

$$f_n(0) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1,$$

car $(x - n)/(x + n) = 1 - 2n/(x + n) \rightarrow 1$ et $e^{-x} \rightarrow 0$. La fonction croît donc de -2 vers la limite 1.

2. La limite $1 > 0$ assure l'existence d'un réel $B > 0$ tel que $f_n(B) > 0$. La fonction est continue sur $[0, B]$ et $f_n(0) < 0 < f_n(B)$: le théorème des valeurs intermédiaires fournit une racine $u_n \in]0, B[$. La stricte croissance de f_n interdit deux racines distinctes. L'équation admet donc exactement une solution u_n dans $[0, +\infty[$.

3. (a) On a $f_n(n) = -e^{-n} < 0 = f_n(u_n)$. Puisque f_n est strictement croissante, cette inégalité implique $n < u_n$. Comme $n \rightarrow +\infty$, on en déduit $u_n \rightarrow +\infty$.

3. (b) Calculons

$$f_n(n+1) = \frac{1}{2n+1} - e^{-(n+1)} = \frac{1 - (2n+1)e^{-(n+1)}}{2n+1}.$$

Par croissances comparées, $ne^{-n} \rightarrow 0$ et $e^{-n} \rightarrow 0$, donc $(2n+1)e^{-(n+1)} \rightarrow 0$. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur est positif ; ainsi $f_n(n+1) > 0$ pour tout n assez grand.

La croissance de f_n et la relation $f_n(u_n) = 0$ donnent alors $u_n < n+1$. En réunissant avec a), puis en divisant par $n > 0$,

$$1 < \frac{u_n}{n} < 1 + \frac{1}{n}$$

pour tout n assez grand. Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

3. (c) Suivons l'indication en fixant un réel $\varepsilon > 0$, indépendant de n . Alors

$$f_n(n+\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2n+\varepsilon} - e^{-(n+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon - (2n+\varepsilon)e^{-(n+\varepsilon)}}{2n+\varepsilon}.$$

Le terme $(2n+\varepsilon)e^{-(n+\varepsilon)}$ tend vers zéro, par les mêmes croissances comparées. Le numérateur tend donc vers $\varepsilon > 0$; la fonction est positive en $n+\varepsilon$ à partir d'un rang qui peut dépendre de ε . Sa croissance impose alors

$$n < u_n < n + \varepsilon, \quad \text{donc } 0 < u_n - n < \varepsilon.$$

Cette propriété est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un rang approprié. C'est la définition de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = 0.$$

4. D'après 3. (a) et 3. (c), $a_n > 0$ et $a_n \rightarrow 0$. La relation $f_n(n + a_n) = 0$ s'écrit

$$\frac{a_n}{2n + a_n} = e^{-n-a_n}.$$

Le dénominateur est strictement positif. En multipliant par $(2n + a_n)e^n/n$, quantité définie pour $n \geq 1$, on obtient

$$\frac{e^n}{n} a_n = \left(2 + \frac{a_n}{n}\right) e^{-a_n}.$$

Comme $a_n \rightarrow 0$, on a $a_n/n \rightarrow 0$ et, par continuité de l'exponentielle, $e^{-a_n} \rightarrow 1$. Le membre de droite tend donc vers 2. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} a_n = 2.$$

En particulier, $a_n \sim 2ne^{-n}$, ce qui précise la vitesse à laquelle u_n se rapproche de n .

EXERCICE 3

1. Les nombres p_i sont strictement positifs et de somme 1. Comme $n \geq 2$ et que tous les autres termes sont positifs, chacun vérifie $0 < p_i < 1$. Ainsi $1/p_i > 1$, donc $\ln(1/p_i) > 0$. Chaque terme $p_i \ln(1/p_i)$ est strictement positif; leur somme finie est bien définie et vérifie

$$H(X) > 0.$$

Si X est uniforme sur I , alors $p_i = 1/n$ pour tout i . On obtient

$$H(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln n = \ln n.$$

2. (a) Méthode 1 — Étude d'une fonction

Sur $]0, +\infty[$, posons $g(x) = x - 1 - \ln x$. On a

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Le dénominateur est positif; g est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Son minimum est $g(1) = 0$. Par conséquent,

$$\ln x \leq x - 1 \quad (x > 0),$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Méthode 2 — Tangente à une fonction convexe

La fonction $h(x) = -\ln x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ et $h''(x) = 1/x^2 > 0$. Elle est donc strictement convexe et sa courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1. Puisque $h(1) = 0$ et $h'(1) = -1$, cela donne

$$-\ln x \geq -(x - 1).$$

On retrouve l'inégalité demandée, stricte si $x \neq 1$ grâce à la stricte convexité. La première méthode fournit le signe par les variations; la seconde rattache l'inégalité au comportement géométrique du logarithme.

2. (b) Comme $p_i > 0$ et $q_i > 0$, on peut appliquer a) au réel q_i/p_i , puis multiplier par $p_i > 0$:

$$p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = q_i - p_i.$$

En sommant ces n inégalités,

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i = 1 - 1 = 0.$$

Pour étudier le cas d'égalité, chaque écart

$$p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 - \ln \frac{q_i}{p_i} \right)$$

est positif ou nul. La somme de ces écarts est nulle si et seulement si chacun est nul. Puisque $p_i > 0$ et que l'égalité en a) caractérise l'argument 1, on obtient

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} = 0 \iff q_i = p_i \text{ pour tout } i \in I.$$

2. (c) Choisissons $q_i = 1/n$ pour tout i . Ce choix satisfait bien aux hypothèses de b).

Pour chaque i ,

$$\ln \frac{q_i}{p_i} = \ln \frac{1}{p_i} - \ln n.$$

En tenant compte de

$$\sum p_i = 1,$$

b) devient

$$H(X) - \ln n \leq 0.$$

Par conséquent $H(X) \leq \ln n$. Le cas d'égalité de b) donne simultanément $p_i = 1/n$ pour tous les indices. Ainsi,

$$H(X) = \ln n \iff X \text{ suit la loi uniforme sur } I.$$

3. Le document fourni introduit seulement le couple (X, Y) , sa loi jointe (r_{ij}) , ses lois marginales et la quantité

$$H(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \ln \frac{1}{r_{ij}}.$$

Tous les logarithmes sont définis puisque $r_{ij} > 0$; la somme est finie. Le numéro 3 s'arrête à cette définition en page 3/3 : aucune propriété à établir, aucun calcul ni aucune sous-question ne sont formulés dans le PDF transmis. Les données visibles ont donc été intégralement conservées dans le sujet ; aucune demande supplémentaire n'est inventée ici.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation mathématique n'a été nécessaire. Les méthodes de résolution emploient les outils du programme actuel.

Points restant à vérifier

Exercice 3, question 3, page 3/3 : le document fourni se termine après la définition de $H(X, Y)$, sans demande à résoudre. Il reste à vérifier si la source historique comporte une suite absente de ce PDF. Ce constat ne correspond pas à une omission de transcription ; toutes les demandes effectivement présentes ont été corrigées.