



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul. On pose $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^{j+1} = f \circ f^j$. On suppose que $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

On peut représenter f par sa matrice A dans la base canonique et identifier $f(X)$ à AX .

1. Soit M la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer le spectre de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?
- b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.
- c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ? Pour $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on rappelle que $P(M) = aM^3 + bM^2 + cM + dI_4$; P est annulateur de M lorsque $P(M) = 0$.

2. Pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :
 $F_j = \text{Im}(f^j)$ et $r_j = \dim(F_j)$.

Pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, on note g_j la restriction de f à F_j , c'est-à-dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par $g_j(x) = f(x)$ pour $x \in F_j$.

- a) Calculer r_0 et r_n .

b) Soit $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

(i) Déterminer le rang de g_j .

(ii) Justifier l'égalité $r_j - r_{j+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap F_j)$.

c) Établir les inégalités :

$$n \geq r_0 - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq \dots \geq r_{n-1} - r_n \geq 0.$$

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H , noté $\text{Card}(H)$, est le nombre de ses éléments.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k -uplets $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers naturels tels que

$$\sum_{i=1}^k i x_i = k,$$

c'est-à-dire :

$$P(k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k : x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = k\}.$$

On pose $p(k) = \text{Card}(P(k))$.

3. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$x_i = \text{Card}(\{j \in \{0, \dots, n-1\} : r_j - r_{j+1} = i\}). (*)$$

a) Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

b) Dans cette question, on suppose $n = 4$.

(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

(iii) Montrer que, pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ vérifiant (*) et $f^4 = 0$. On pourra construire sa matrice en précisant les images des quatre vecteurs de la base canonique.

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$Q(\ell, k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in P(k) : x_1 + \dots + x_k \leq \ell\},$$

$$\text{et } q(\ell, k) = \text{Card}(Q(\ell, k)).$$

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

(ii) Pour tout entier $\ell \geq k$, justifier l'égalité $Q(\ell, k) = P(k)$.

b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geq 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \text{Card}(\{(x_1, \dots, x_k) \in P(k) : x_1 + \dots + x_k = \ell\}).$$

On pourra interpréter x_i comme le nombre de termes égaux à i dans une somme de ℓ entiers strictement positifs, puis retrancher 1 à chacun de ces termes et supprimer les termes nuls. Décrire une correspondance bijective et sa réciproque.

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

(ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

5. La fonction Python suivante, dont le script est incomplet aux deux affectations indiquées, calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que, pour chaque couple $(\ell, k) \in \{1, \dots, n\}^2$, le coefficient de la ligne ℓ et de la colonne k soit égal à $q(\ell, k)$.

Les indices Python commencent à 0 : ce coefficient est `q[L-1, K-1]`. La commande `np.ones((n, n), dtype=int)` crée une matrice carrée de taille n , remplie d'entiers égaux à 1. Dans `range(a, b)`, la borne b est exclue.

Python

```
import numpy as np

def qmatrix(n):
    q = np.ones((n, n), dtype=int)
    for L in range(2, n + 1):
        for K in range(2, n + 1):
            if K < L:
                q[L - 1, K - 1] = ...
            elif K == L:
                q[L - 1, K - 1] = ...
            else:
                q[L - 1, K - 1] = q[L - 2, K - 1] + q[L - 1, K - L - 1]
    return q
```

L'application de la fonction `qmatrix` à $n = 9$ fournit la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 9 & 11 & 15 & 18 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 10 & 13 & 18 & 23 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 14 & 20 & 26 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 15 & 21 & 28 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 15 & 22 & 29 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 15 & 22 & 30 \end{pmatrix}.$$

- Compléter les deux affectations incomplètes du script de la fonction `qmatrix`.
- Donner un script Python permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier. La commande `input("n = ")` lit une chaîne de caractères au clavier et `int(...)` la convertit en entier; `print(...)` affiche une valeur.
- Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$, applicable à tout entier $k \geq 1$, puis la démontrer.

Problème

Dans tout le problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p , avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = 0) = 1 - p$.

On suppose que, pour tout couple $(k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\frac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ r & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

1. a) Dans les deux cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de

$$\sum_{k=1}^n X_k$$

en fonction de n et p .

(i) Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de

$$\sum_{k=1}^n X_k$$

dans chacun des deux cas précédents.

b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la variance de

$$\sum_{i=1}^k X_i$$

est donnée par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = kp(1-p)(1 + (k-1)r).$$

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\frac{1}{n-1}$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) Montrer que $r = -1$ si et seulement si $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p - 1)$.

b) Que vaut $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$?

c) En déduire que r ne peut être égal à -1 que lorsque $p = \frac{1}{2}$ et $P(X_1 + X_2 = 1) = 1$.

3. On suppose dans cette question que $n \geq 3$ et que

$$P\left(\sum_{k=1}^n X_k = 1\right) = 1.$$

a) Exprimer les valeurs de p et de r en fonction de n .

b) Déterminer les n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels $P(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k])$ est strictement positive et la calculer.

Partie II. Lois bêta-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

Ici, la convergence en 0 signifie l'existence d'une limite finie de $\int_\varepsilon^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. On encadrera $(1-t)^{y-1}$ par deux constantes strictement positives pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et l'on calculera explicitement $\int_\varepsilon^{1/2} t^{x-1} dt$, en distinguant $x = 0$.

b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, établir, à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{1/2}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_\varepsilon^{1/2} t^{y-1}(1-t)^{x-1} dt.$$

c) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. La convergence sur $]0, 1[$ signifie la convergence des deux intégrales obtenues en coupant en $\frac{1}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on pose, pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

5. Soient x et y des réels strictement positifs.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$.

b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$.

6. Pour tout réel z , soit $((z)^{[m]})_{m \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $(z)^{[0]} = 1$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,
 $(z)^{[m+1]} = (z + m)(z)^{[m]}$; par exemple, $(1)^{[m]} = m!$.

Établir, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leq k \leq \ell$, la relation :

$$B(x + k, y + \ell - k) = \frac{(x)^{[k]}(y)^{[\ell-k]}}{(x + y)^{[\ell]}} B(x, y).$$

7. Soient a et b des réels strictement positifs. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose :

$$p_k = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]}(b)^{[n-k]}}{(a + b)^{[n]}}.$$

- a) À l'aide de la relation obtenue à la question 6, montrer que

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1.$$

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $\mathcal{B}(n; a, b)$ si

$S(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et si :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P(S = k) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]}(b)^{[n-k]}}{(a + b)^{[n]}}.$$

- b) Reconnaître la loi $\mathcal{B}(n; 1, 1)$.

- c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\mathcal{B}(n; a, b)$ est égale à
 $\frac{na}{a + b}.$

Partie III. Un modèle possible dans le cas où $n = 2$

Soient a et b des réels strictement positifs et X_1, X_2 deux variables aléatoires à valeurs

dans $\{0, 1\}$ telles que, pour tout $(x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$:

$$P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) = \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a, b)}.$$

8. a) Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.
- b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\mathcal{B}(2; a, b)$.
- c) Établir la relation : $P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{a + 1}{a + b + 1}$.
9. La fonction Python suivante, dont le script est incomplet aux deux tests indiqués, effectue une simulation des deux variables aléatoires X_1 et X_2 , qu'elle place dans un tableau à deux composantes.

Chaque appel à `rd.random()` simule une variable uniforme sur $[0, 1[$; les deux tirages sont indépendants. La commande `np.zeros(2, dtype=int)` crée un tableau de deux entiers nuls. Ses deux composantes sont `x[0]` et `x[1]`.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def randbetabin(a, b):
    x = np.zeros(2, dtype=int)

    u = (a + b) * rd.random()
    v = (a + b + 1) * rd.random()

    if u < a:
        x[0] = 1

        if ...:
            x[1] = 1

    else:
        if ...:
```

```
x[1] = 1  
return x
```

- a) Préciser la loi simulée par la variable u .
 - b) Compléter les deux tests incomplets du script.
10. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2 .
- b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$. Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r .