



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2018

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les calculs de rang utilisent uniquement les images de vecteurs et le théorème du rang. Aucune classification des matrices vérifiant $A^n = 0$ n'est nécessaire.

1. a) La matrice donnée vérifie $Me_1 = Me_2 = 0$, $Me_3 = e_2$ et $Me_4 = e_3$. Ainsi $M^3 = 0$.

Si $Mv = \lambda v$ avec $v \neq 0$, alors $0 = M^3v = \lambda^3v$, donc $\lambda = 0$. Réciproquement, $Me_1 = 0$ et $e_1 \neq 0$, donc 0 est valeur propre. Par conséquent $\text{Sp}(M) = \{0\}$.

Si M était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Elle serait donc nulle, alors que $Me_3 = e_2 \neq 0$. La matrice M n'est pas diagonalisable.

1. b) Les images des vecteurs de la base donnent $\text{Im}(M) = \text{Vect}(e_2, e_3)$. Ces deux vecteurs sont indépendants, donc $\text{rg}(M) = 2$.

De même, $M^2e_4 = e_2$ et $M^2e_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Ainsi $\text{Im}(M^2) = \text{Vect}(e_2)$ et $\text{rg}(M^2) = 1$.

1. c) Question adaptée au programme actuel : la définition concrète de $P(M)$ est rappelée ; aucun résultat général supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est utilisé.

Écrivons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$. Comme $M^3 = 0$, la condition à résoudre est $bM^2 + cM + dI_4 = 0$.

En appliquant cette matrice à e_1 , on obtient $de_1 = 0$, donc $d = 0$. En l'appliquant ensuite à e_3 , on obtient $ce_2 = 0$, donc $c = 0$. Enfin, l'application à e_4 donne $be_2 = 0$, donc $b = 0$.

Réciproquement, tout polynôme $P(X) = aX^3$ avec $a \neq 0$ vérifie $P(M) = 0$. Les polynômes cherchés sont exactement les aX^3 , pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. a) Puisque f^0 est l'identité, $F_0 = \mathbb{R}^n$ et $r_0 = n$. Puisque $f^n = 0$, $F_n = \{0\}$ et $r_n = 0$.

2. b) (i) Pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\text{Im}(g_j) = f(F_j) = f(f^j(\mathbb{R}^n)) = f^{j+1}(\mathbb{R}^n) = F_{j+1}.$$

Ainsi $\text{rg}(g_j) = r_{j+1}$.

2. b) (ii) Le domaine F_j est de dimension r_j . Le noyau de g_j est l'ensemble des vecteurs de F_j annulés par f , soit $\text{Ker}(g_j) = \text{Ker}(f) \cap F_j$. Le théorème du rang appliqué à g_j donne donc :

$$r_j = \dim(\text{Ker}(f) \cap F_j) + r_{j+1},$$

ce qui établit l'égalité demandée.

2. c) Pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $F_{j+1} \subset F_j$: en effet $f^{j+1}(x) = f^j(f(x))$ appartient à F_j .

Il en résulte, pour $0 \leq j \leq n-2$, que $\text{Ker}(f) \cap F_{j+1} \subset \text{Ker}(f) \cap F_j$. En comparant les dimensions et en utilisant 2.b)(ii), on obtient :

$$r_{j+1} - r_{j+2} \leq r_j - r_{j+1}.$$

Ces différences sont des dimensions, donc sont positives ou nulles. Enfin

$r_0 - r_1 \leq r_0 = n$. D'où toute la chaîne d'inégalités annoncée.

3. a) Posons $d_j = r_j - r_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Chaque d_j est un entier compris entre 0 et n . En regroupant les d_j selon leur valeur, et en remarquant que les termes nuls ne contribuent pas à la somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n ix_i = \sum_{j=0}^{n-1} d_j = \sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) = r_0 - r_n = n.$$

Les x_i étant des entiers naturels, cela signifie exactement que $(x_1, \dots, x_n) \in P(n)$.

3. b) (i) Pour la matrice M , les rangs successifs sont $(r_0, r_1, r_2, r_3, r_4) = (4, 2, 1, 0, 0)$. Les différences sont $(2, 1, 1, 0)$: la valeur 1 apparaît deux fois, la valeur 2 une fois, et les

valeurs 3 et 4 jamais. Ainsi $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$.

3. b) (ii) Il faut résoudre $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4$ dans $\mathbb{N}^4$.

Si $x_4 = 1$, les autres coordonnées sont nulles. Si $x_4 = 0$ et $x_3 = 1$, il reste $x_1 + 2x_2 = 1$, donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$. Si $x_4 = x_3 = 0$, alors x_2 vaut 0, 1 ou 2, et $x_1 = 4 - 2x_2$.

On a donc :

$$P(4) = \{(4, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Ces cinq éléments sont distincts et les cas précédents sont exhaustifs ; ainsi $p(4) = 5$.

3. b) (iii) Question adaptée au programme actuel : la construction est guidée par les images des vecteurs de la base canonique. On construit directement cinq matrices, sans utiliser de théorème général de réduction.

Les images ci-dessous définissent, dans chaque ligne, un unique endomorphisme linéaire :

(x_1, x_2, x_3, x_4)	$f(e_1)$	$f(e_2)$	$f(e_3)$	$f(e_4)$	$(r_0, r_1, r_2, r_3, r_4)$
$(4, 0, 0, 0)$	0	e_1	e_2	e_3	$(4, 3, 2, 1, 0)$
$(2, 1, 0, 0)$	0	0	e_2	e_3	$(4, 2, 1, 0, 0)$
$(0, 2, 0, 0)$	0	e_1	0	e_3	$(4, 2, 0, 0, 0)$
$(1, 0, 1, 0)$	0	e_1	0	0	$(4, 1, 0, 0, 0)$
$(0, 0, 0, 1)$	0	0	0	0	$(4, 0, 0, 0, 0)$

Pour justifier les rangs, on lit dans chaque ligne les vecteurs de base qui sont encore atteints après une, deux, trois et quatre applications. Par exemple, dans la première ligne, les images successives sont engendrées par (e_1, e_2, e_3) , puis (e_1, e_2) , puis e_1 , puis aucun vecteur non nul. Dans la troisième ligne, les deux images non nulles e_1, e_3 sont annulées par f , d'où les rangs 2 puis 0.

Dans les cinq cas, f^4 annule chaque vecteur de la base, donc $f^4 = 0$. Les suites de

différences sont respectivement $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(2, 2, 0, 0)$, $(3, 1, 0, 0)$ et $(4, 0, 0, 0)$; leurs multiplicités positives sont bien les cinq quadruplets indiqués. Cela prouve l'existence demandée pour chaque élément de $P(4)$.

4. a) (i) Pour appartenir à $Q(1, k)$, il faut que

$$\sum_i x_i \leq 1$$

et

$$\sum_i ix_i = k \geq 1.$$

Il y a donc exactement une coordonnée égale à 1, les autres étant nulles. La somme pondérée impose que cette coordonnée soit celle d'indice k .

Ainsi $Q(1, k) = \{(0, \dots, 0, 1)\}$ et $q(1, k) = 1$; pour $k = 1$, cet ensemble est simplement $\{(1)\}$.

4. a) (ii) Si $(x_1, \dots, x_k) \in P(k)$, alors

$$\sum_i x_i \leq \sum_i ix_i = k \leq \ell.$$

Tout élément de $P(k)$ est donc dans $Q(\ell, k)$. L'inclusion inverse découle de la définition de $Q(\ell, k)$. Ainsi $Q(\ell, k) = P(k)$ et $q(\ell, k) = p(k)$ pour $\ell \geq k$.

4. b) Question adaptée au programme actuel : une indication de bijection accompagne ce comptage. On en donne les deux sens pour ne supposer aucun résultat général sur les partitions.

Posons $m = k - \ell > 0$ et notons E l'ensemble de droite dans l'égalité à démontrer. Un

élément x de E vérifie

$$\sum_j x_j = \ell$$

et

$$\sum_j jx_j = k.$$

Si $x_j > 0$, une somme de ℓ termes positifs dont l'un vaut j est au moins $j + \ell - 1$. Ainsi $j \leq k - \ell + 1 = m + 1$; toutes les coordonnées d'indice supérieur à $m + 1$ sont nulles.

Définissons $y_i = x_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq m$. Alors :

$$\sum_{i=1}^m iy_i = \sum_{j=2}^{m+1} (j-1)x_j = k - \ell = m,$$

et

$$\sum_{i=1}^m y_i = \ell - x_1 \leq \ell.$$

Donc $y \in Q(\ell, m)$.

Réciproquement, si $y \in Q(\ell, m)$, posons

$$x_1 = \ell - \sum_{i=1}^m y_i,$$

$x_{i+1} = y_i$ pour $1 \leq i \leq m$, puis $x_j = 0$ pour $m+2 \leq j \leq k$. Toutes ces coordonnées sont

des entiers naturels. Elles vérifient :

$$\sum_{j=1}^k x_j = \ell, \quad \sum_{j=1}^k jx_j = \ell - \sum_{i=1}^m y_i + \sum_{i=1}^m (i+1)y_i = \ell + m = k.$$

Cette construction appartient donc à E et inverse exactement la précédente. Les deux ensembles sont en bijection, d'où $\text{Card}(E) = q(\ell, k - \ell)$.

4. c) (i) Dans $Q(\ell, k)$, le nombre entier

$$\sum_i x_i$$

est soit au plus $\ell - 1$, soit égal à ℓ . Ces deux cas sont disjoints. Le premier correspond à $Q(\ell - 1, k)$ et le second à l'ensemble E de 4.b), puisque $k > \ell \geq 2$.

En additionnant les deux cardinaux, on obtient $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

4. c) (ii) La différence compte les éléments de $P(\ell)$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{\ell} x_i = \ell.$$

Comme

$$\sum_i ix_i = \ell$$

également, on a

$$\sum_i (i-1)x_i = 0.$$

Les termes étant positifs ou nuls, $x_i = 0$ pour $i \geq 2$ et $x_1 = \ell$.

Il y a un unique élément supplémentaire ; ainsi $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell) = 1$.

5. a) Code adapté en Python. Les lignes et les colonnes Python sont décalées d'une unité par rapport aux indices mathématiques.

Si $K < L$, alors $L - 1 \geq K$, donc $q(L, K) = p(K) = q(L - 1, K)$ par 4.a)(ii). Si $K = L$, la question 4.c)(ii) donne $q(L, L) = q(L - 1, L) + 1$. Si $K > L$, on utilise 4.c)(i).

Le code complet est :

Python

```
import numpy as np

def qmatrix(n):
    q = np.ones((n, n), dtype=int)
    for L in range(2, n + 1):
        for K in range(2, n + 1):
            if K < L:
                q[L - 1, K - 1] = q[L - 2, K - 1]
            elif K == L:
                q[L - 1, K - 1] = q[L - 2, K - 1] + 1
            else:
                q[L - 1, K - 1] = q[L - 2, K - 1] + q[L - 1, K - L - 1]
    return q
```

L'initialisation à 1 est correcte sur la première ligne par 4.a)(i), et sur la première colonne car $P(1) = \{(1)\}$. Les autres coefficients sont calculés ligne par ligne. La référence à la ligne précédente est déjà calculée ; dans le dernier cas, la colonne $K - L$ est strictement antérieure à K dans la ligne courante. Les indices utilisés sont donc valides et les valeurs nécessaires sont déjà disponibles.

Ce programme utilise le type entier de NumPy : pour des entrées très grandes, les nombres de partitions peuvent dépasser sa capacité. Le calcul demandé pour $n = 9$ ne présente pas cette difficulté.

5. b) Code adapté en Python. D'après 4.a)(ii), $p(n) = q(n, n)$, accessible à l'indice $[n-1, n-1]$. Le script complet, avec la fonction requise, est :

Python

```
import numpy as np

def qmatrix(n):
    q = np.ones((n, n), dtype=int)
    for L in range(2, n + 1):
        for K in range(2, n + 1):
            if K < L:
                q[L - 1, K - 1] = q[L - 2, K - 1]
            elif K == L:
                q[L - 1, K - 1] = q[L - 2, K - 1] + 1
            else:
                q[L - 1, K - 1] = q[L - 2, K - 1] + q[L - 1, K - L - 1]
    return q

n = int(input("n = "))
q = qmatrix(n)
print(q[n - 1, n - 1])
```

Pour une entrée entière $n \geq 1$ dans les capacités numériques du tableau, le script affiche $p(n)$. En particulier, pour $n = 9$, il affiche 30.

5. c) La deuxième ligne suggère $q(2, k) = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$ pour tout $k \geq 1$.

Méthode 1 — Comptage direct

Un élément de $Q(2, k)$ correspond soit à un terme positif égal à k , soit à deux termes positifs $u \leq v$ de somme k . Le premier cas fournit un élément. Dans le second, $v = k - u$ et $1 \leq u \leq \lfloor k/2 \rfloor$. Chaque choix de u détermine un unique élément de $P(k)$: si $u < v$, les deux coordonnées d'indices u, v valent 1 ; si $u = v$, la coordonnée d'indice u vaut 2. Les

choix distincts donnent des éléments distincts.

Les deux cas sont disjoints et exhaustifs. On obtient donc $q(2, k) = 1 + \lfloor k/2 \rfloor$, y compris pour $k = 1$, où le second cas est vide.

Méthode 2 — Récurrence de pas deux

Par 4.a), $q(2, 1) = 1$. Par 4.c)(ii), $q(2, 2) = q(1, 2) + 1 = 2$. Pour $k > 2$, 4.c)(i) donne $q(2, k) = 1 + q(2, k - 2)$.

Par récurrence sur chaque parité, $q(2, 2m) = m + 1$ pour $m \geq 1$, et $q(2, 2m + 1) = m + 1$ pour $m \geq 0$. C'est exactement la formule conjecturée.

Le comptage décrit les objets ; la récurrence réutilise directement la structure qui permet de calculer la matrice.

Problème

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Toutes les variables considérées prennent un nombre fini de valeurs. Leurs espérances, variances et covariances existent donc. Pour chaque i , $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1 - p) > 0$; tous les coefficients de corrélation employés sont définis.

1. a) (i) L'indépendance mutuelle entraîne la nullité des covariances deux à deux :
 $r = 0$. La somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$; ainsi $V(S_n) = np(1 - p)$ et $P(S_n = j) = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}$ pour $0 \leq j \leq n$.

1. a) (ii) Si toutes les variables sont égales à X_1 , alors $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = V(X_1) = p(1-p)$ et $r = 1$. La somme vaut $S_n = nX_1$, donc $V(S_n) = n^2p(1-p)$.

Sa loi est donnée par $P(S_n = 0) = 1-p$ et $P(S_n = n) = p$; ses autres probabilités sont nulles.

1. b) Le développement de la variance d'une somme donne :

$$V\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

La première somme vaut $kp(1-p)$. Pour $i \neq j$, la définition de r donne $\text{Cov}(X_i, X_j) = rp(1-p)$. Il y a $k(k-1)/2$ paires $i < j$. Ainsi :

$$V\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = kp(1-p) + k(k-1)rp(1-p) = kp(1-p)(1 + (k-1)r).$$

Pour $k = 1$, la somme des covariances est vide, ce qui donne la même formule.

1. c) Appliquons la formule à $k = n$. Une variance est positive ou nulle et $np(1-p) > 0$. Donc $1 + (n-1)r \geq 0$. Comme $n-1 > 0$, on conclut $r \geq -1/(n-1)$.

2. a) Posons $t = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$. Puisque $X_1 X_2$ est l'indicatrice de cet événement, $E(X_1 X_2) = t$. La formule de Koenig-Huygens pour la covariance donne :

$$r = \frac{t - p^2}{p(1-p)}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Ainsi $r = -1$ équivaut à $t - p^2 = -p(1-p)$, soit $t = 2p^2 - p = p(2p-1)$.

2. b) En général, l'inclusion-exclusion donne :

$$P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = 1 - 2p + t.$$

Sous l'hypothèse $r = -1$ de la question précédente, on remplace t par $p(2p - 1)$, d'où :

$$P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = 1 - 3p + 2p^2 = (1 - p)(1 - 2p).$$

2. c) Méthode 1 — Positivité des probabilités

Si $r = -1$, la positivité de $t = p(2p - 1)$ et $p > 0$ impose $p \geq 1/2$. La positivité de $(1 - p)(1 - 2p)$ et $1 - p > 0$ impose $p \leq 1/2$. Donc $p = 1/2$.

Pour cette valeur, $t = 0$ et la probabilité du couple $(0, 0)$ est nulle. Les deux seules autres valeurs possibles du couple sont $(1, 0)$ et $(0, 1)$, sur lesquelles la somme vaut 1. Ainsi $P(X_1 + X_2 = 1) = 1$.

Méthode 2 — Variance nulle

La question 1.b) donne $V(X_1 + X_2) = 2p(1 - p)(1 + r) = 0$. Pour une variable à support fini, une variance nulle implique qu'elle est presque sûrement égale à son espérance : en effet la somme

$$\sum_s (s - E(S))^2 P(S = s)$$

ne peut être nulle que si chaque terme de probabilité positive est nul.

Ici $S = X_1 + X_2$ est donc presque sûrement égal à $2p$. Comme S est entier et $0 < 2p < 2$, il faut que $2p = 1$. On retrouve $p = 1/2$ et $S = 1$ presque sûrement.

La première méthode exploite la loi jointe ; la seconde explique pourquoi la corrélation extrême impose une somme déterministe. Réciproquement, lorsque $p = 1/2$ et $S = 1$ presque sûrement, 1.b) implique $r = -1$.

3. a) La somme S_n vaut 1 presque sûrement. Par linéarité, $1 = E(S_n) = np$, donc $p = 1/n$.

De plus, $V(S_n) = 0$. Comme $np(1-p) > 0$, la formule 1.b) impose $1 + (n-1)r = 0$. Ainsi $r = -1/(n-1)$: la borne de 1.c) est atteinte.

3. b) Si un n -uplet ne contient pas exactement un 1, l'événement correspondant est inclus dans $\{S_n \neq 1\}$ et a une probabilité nulle.

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, considérons le n -uplet dont la seule composante égale à 1 est la j -ième. L'événement correspondant diffère de $\{X_j = 1\}$ seulement par un événement inclus dans $\{S_n \neq 1\}$. Il a donc la même probabilité, soit $p = 1/n > 0$.

Les seuls n -uplets de probabilité strictement positive sont les n vecteurs ainsi décrits, chacun de probabilité $1/n$. Ces probabilités somment bien à 1.

Partie II. Loïs bêta-binomiales

4. a) Question adaptée au programme actuel : le sens de l'intégrale au voisinage de la borne finie 0 et le calcul de comparaison sont explicitement guidés.

La fonction $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est continue et strictement positive sur le segment $[0, 1/2]$. On peut prendre :

$$m_y = \min(1, 2^{1-y}) > 0, \quad M_y = \max(1, 2^{1-y}) < +\infty.$$

Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, l'intégration de l'encadrement donne :

$$m_y \int_{\varepsilon}^{1/2} t^{x-1} dt \leq \int_{\varepsilon}^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \leq M_y \int_{\varepsilon}^{1/2} t^{x-1} dt.$$

Si $x \neq 0$, l'intégrale de comparaison vaut $((1/2)^x - \varepsilon^x)/x$. Elle tend vers $(1/2)^x/x$ si $x > 0$, et vers $+\infty$ si $x < 0$. Si $x = 0$, elle vaut $\ln(1/2) - \ln(\varepsilon)$ et tend vers $+\infty$.

Si $x > 0$, les intégrales tronquées du milieu sont majorées et croissent lorsque ε décroît : elles ont une limite finie. Si $x \leq 0$, la minoration les fait tendre vers $+\infty$. L'intégrale demandée converge donc exactement lorsque $x > 0$, quel que soit $y \in \mathbb{R}$.

4. b) Sur le segment $[1/2, 1 - \varepsilon]$, les fonctions intégrées sont continues. Effectuons le changement de variable affine $u = 1 - t$, donc $dt = -du$. Les bornes deviennent $1/2$ et ε . Ainsi :

$$\int_{1/2}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_{1/2}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du) = \int_{\varepsilon}^{1/2} u^{y-1}(1-u)^{x-1} du.$$

La lettre de la variable d'intégration étant muette, on peut remplacer u par t dans la dernière intégrale.

4. c) Question adaptée au programme actuel : le sens de la convergence aux deux bornes finies est précisé dans l'énoncé.

L'intégrale sur $]0, 1[$ converge lorsque les deux intégrales obtenues en coupant en $1/2$ ont chacune une limite finie. La première converge exactement pour $x > 0$, par 4.a). Par l'identité de 4.b), la seconde converge exactement pour $y > 0$, en appliquant 4.a) au couple (y, x) .

Il y a donc convergence si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Pour de tels paramètres, l'intégrande est strictement positif sur $]0, 1[$; ainsi $0 < B(x, y) < +\infty$. Les divisions ultérieures par $B(x, y)$ sont justifiées.

5. a) Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, intégrons d'abord sur le segment $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Prenons $u(t) = t^x$ et $v'(t) = (1 - t)^{y-1}$, donc $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v(t) = -(1 - t)^y/y$; ces fonctions sont de classe C^1 sur ce segment et $y > 0$.

L'intégration par parties donne :

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^x(1-t)^{y-1} dt = \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y} \right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \frac{x}{y} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^y dt.$$

Comme $x, y > 0$, chacun des termes aux bornes tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Les deux intégrales convergent par 4.c), appliquée à $(x+1, y)$ et $(x, y+1)$. En passant à la limite, on obtient $B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$.

5. b) Sur $]0, 1[$, l'identité $t + (1 - t) = 1$ donne :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y.$$

Les trois intégrales convergent ; par linéarité, $B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1)$. La question précédente donne alors $B(x, y) = (x/y + 1)B(x, y+1)$.

Puisque $x + y > 0$, on obtient $B(x, y+1) = \frac{y}{x+y}B(x, y)$. On en déduit également $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y}B(x, y)$, qui servira ensuite.

6. La définition donne

$$(z)^{[m]} = \prod_{j=0}^{m-1} (z + j)$$

pour $m \geq 1$, avec le produit vide égal à 1. Pour $x, y > 0$, tous les facteurs des dénominateurs ci-dessous sont strictement positifs.

Appliquons k fois la relation $B(u+1, v) = uB(u, v)/(u+v)$, en maintenant le second paramètre égal à y . On obtient, y compris pour $k = 0$:

$$B(x+k, y) = \frac{(x)^{[k]}}{(x+y)^{[k]}} B(x, y).$$

Appliquons ensuite $\ell - k$ fois la relation $B(u, v+1) = vB(u, v)/(u+v)$, avec $u = x+k$:

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(y)^{[\ell-k]}}{(x+y+k)^{[\ell-k]}} B(x+k, y).$$

Or $(x+y)^{[k]}(x+y+k)^{[\ell-k]} = (x+y)^{[\ell]}$, car les produits portent successivement sur les facteurs d'indices 0 à $k-1$, puis k à $\ell-1$.

En multipliant les deux relations, on obtient la formule annoncée. Le raisonnement inclut $k = 0$, $k = \ell$ et $\ell = 0$ grâce aux produits vides.

7. a) Par 6, $p_k = \binom{n}{k} B(a+k, b+n-k)/B(a, b)$. Les coefficients sont strictement positifs, puisque $a, b > 0$.

La somme est finie. On peut donc utiliser la linéarité des intégrales convergentes, sans aucun échange de somme infinie et d'intégrale :

$$\sum_{k=0}^n p_k = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} dt.$$

Par le binôme de Newton, la somme à l'intérieur est $(t + (1-t))^n = 1$. On conclut

$$\sum_{k=0}^n p_k = B(a, b) / B(a, b) = 1.$$

Les p_k définissent donc bien une loi de probabilité sur $\{0, \dots, n\}$.

7. b) Pour $a = b = 1$, on utilise $(1)^{[k]} = k!$, $(1)^{[n-k]} = (n-k)!$ et $(2)^{[n]} = (n+1)!$. Ainsi, pour chaque $0 \leq k \leq n$:

$$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

La loi $\mathcal{B}(n; 1, 1)$ est donc la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.

7. c) La variable S a un support fini, donc son espérance existe.

Méthode 1 — Identité binomiale et intégrale

On écrit

$$E(S) = \sum_{k=1}^n k p_k$$

et l'on utilise $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Pour $0 < t < 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{n-1-j} = nt.$$

La représentation de 7.a) et la linéarité pour cette somme finie donnent donc :

$$E(S) = \frac{n}{B(a, b)} \int_0^1 t^a (1-t)^{b-1} dt = n \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} = \frac{na}{a+b}.$$

La dernière identité est celle déduite en 5.b), avec $a, b > 0$.

Méthode 2 — Décalage de la loi discrète

Pour $k \geq 1$, posons $j = k - 1$. Les identités $(a)^{[k]} = a(a+1)^{[j]}$ et $(a+b)^{[n]} = (a+b)(a+b+1)^{[n-1]}$ donnent :

$$kp_k = \frac{na}{a+b} \binom{n-1}{j} \frac{(a+1)^{[j]} (b)^{[n-1-j]}}{(a+b+1)^{[n-1]}}.$$

Le facteur qui suit $na/(a+b)$ est la probabilité d'indice j de la loi $\mathcal{B}(n-1; a+1, b)$. Ses paramètres sont positifs. L'argument de normalisation de 7.a) vaut pour tout entier positif; si $n-1=1$, il se réduit à $b/(a+b+1) + (a+1)/(a+b+1) = 1$.

En sommant pour $j = 0, \dots, n-1$, le facteur probabiliste somme donc à 1, et l'on retrouve $E(S) = na/(a+b)$.

La première méthode transforme la somme en une seule intégrale; la seconde reconnaît directement une loi normalisée après le décalage d'indice.

Partie III. Un modèle possible dans le cas où $n = 2$

Posons $c = a + b > 0$ et $D = c(c + 1) > 0$. La question 6 donne la loi jointe suivante :

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$b(b + 1)/D$	ab/D
1	ab/D	$a(a + 1)/D$

Ces quatre probabilités sont positives et leur somme vaut

$(b(b + 1) + 2ab + a(a + 1))/D = (c^2 + c)/D = 1$. Le modèle définit donc bien une loi jointe.

8. a) En sommant la ligne correspondant à $X_1 = 1$, on obtient :

$$P(X_1 = 1) = \frac{ab + a(a + 1)}{c(c + 1)} = \frac{a(c + 1)}{c(c + 1)} = \frac{a}{c}.$$

Par la symétrie du tableau, $P(X_2 = 1) = a/c$. Les deux variables sont à valeurs dans $\{0, 1\}$; elles suivent donc chacune la loi de Bernoulli de paramètre $p = a/(a + b) \in]0, 1[$.

8. b) La somme $S = X_1 + X_2$ prend les valeurs 0, 1, 2, avec :

$$P(S = 0) = \frac{b(b + 1)}{D}, \quad P(S = 1) = \frac{2ab}{D}, \quad P(S = 2) = \frac{a(a + 1)}{D}.$$

Ces trois expressions sont précisément $\binom{2}{k} (a)^{[k]} (b)^{[2-k]} / (a + b)^{[2]}$ pour $k = 0, 1, 2$. Donc S suit $\mathcal{B}(2; a, b)$.

8. c) L'événement $\{X_1 = 1\}$ a une probabilité $a/c > 0$, donc le conditionnement est défini. Par la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{a(a + 1)/(c(c + 1))}{a/c} = \frac{a + 1}{c + 1} = \frac{a + 1}{a + b + 1}.$$

9. a) Code adapté en Python. Si U_0 est uniforme sur $[0, 1[$, alors $u = (a + b)U_0$ suit la loi uniforme sur $[0, a + b[$, ou de façon équivalente sur $[0, a + b]$, puisque les extrémités ont une probabilité nulle.

En particulier $P(u < a) = a/(a + b)$: le premier test produit bien la loi marginale de X_1 .

9. b) Code adapté en Python. Le deuxième tirage v est indépendant du premier et uniforme sur $[0, c + 1[$.

Si $X_1 = 1$, la question 8.c) impose $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = (a + 1)/(c + 1)$; on choisit donc le test $v < a + 1$.

Si $X_1 = 0$, la loi jointe donne, puisque $P(X_1 = 0) = b/c > 0$:

$$P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{ab/(c(c + 1))}{b/c} = \frac{a}{c + 1}.$$

Il faut alors le test $v < a$. On obtient :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def randbetabin(a, b):
    x = np.zeros(2, dtype=int)
    u = (a + b) * rd.random()
    v = (a + b + 1) * rd.random()
    if u < a:
        x[0] = 1
        if v < a + 1:
            x[1] = 1
    else:
        if v < a:
            x[1] = 1
    return x
```

Tous les seuils sont strictement compris dans les intervalles de tirage car $a, b > 0$. Le tableau est initialisé à zéro ; les affectations à 1 ne changent que les coordonnées

correspondant aux événements réalisés. Par la formule des probabilités composées, les quatre probabilités du tableau renvoyé sont celles de la loi jointe écrite avant 8.a). Cela justifie mathématiquement la simulation ; une expérience numérique seule ne la démontrerait pas.

Les fonctions complétées et les calculs numériques de l'exercice ont été exécutés. Le script de saisie de 5.b) a été contrôlé avec une entrée fixée, en remplaçant seulement la lecture au clavier. Les codes à compléter du sujet restent volontairement incomplets.

10. a) Les deux variables de Bernoulli ont la même variance $p(1-p) = ab/c^2 > 0$.

Comme $X_1 X_2$ vaut 1 seulement sur le couple $(1, 1)$:

$$E(X_1 X_2) = \frac{a(a+1)}{c(c+1)}.$$

La covariance vaut donc :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{a(a+1)}{c(c+1)} - \frac{a^2}{c^2} = \frac{ac(a+1) - a^2(c+1)}{c^2(c+1)} = \frac{a(c-a)}{c^2(c+1)} = \frac{ab}{c^2(c+1)}.$$

Le coefficient de corrélation est le quotient de cette covariance par ab/c^2 . Ainsi

$r = 1/(c+1) = 1/(a+b+1)$, qui appartient à $]0, 1[$.

10. b) On souhaite résoudre simultanément $a/(a+b) = p$ et $1/(a+b+1) = r$. Posons :

$$c = \frac{1-r}{r}, \quad a = p \frac{1-r}{r}, \quad b = (1-p) \frac{1-r}{r}.$$

Comme $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$, ces deux paramètres sont strictement positifs. Leur somme vaut c , et les deux relations voulues sont satisfaites. Il suffit donc d'appeler `randbetabin(p * (1 - r) / r, (1 - p) * (1 - r) / r)`.

Les deux composantes du tableau retourné simulent les variables demandées. Le domaine ouvert des paramètres est essentiel : la construction utilisée ici impose $a, b > 0$ et ne donne pas directement les cas $p = 0, p = 1, r = 0$ ou $r = 1$, qui ne sont pas demandés.

Relevé des adaptations

- Exercice, préambule : identification de l'endomorphisme à sa matrice dans la base canonique, pour situer les calculs dans le cadre concret de $\mathbb{R}^n$.
- Exercice 1.c) : définition de $P(M)$ et du mot « annulateur » rappelée ; résolution par les coefficients d'un polynôme cubique, sans théorie supplémentaire.
- Exercice 3.b)(iii) : indication de construction par images de la base canonique ; les cinq constructions sont vérifiées directement.
- Exercice 4.b) : indication de la bijection qui retranche une unité à chaque terme, afin de guider le comptage sans supposer un cours général sur les partitions.
- Exercice 5.a), 5.b) et préambule de 5 : Code adapté en Python ; maintien des deux blancs, conversion des indices et documentation des commandes utiles. La matrice numérique d'origine est conservée intégralement.
- Problème 4.a), 4.c) : définition des limites aux bornes finies et indication de calcul explicite de l'intégrale de comparaison, pour traiter ces singularités de manière accompagnée.
- Problème 9.a), 9.b) et préambule de 9 : Code adapté en Python ; maintien des deux tests à compléter, documentation des tirages uniformes et des indices du tableau.