



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2017

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1.a) Le produit matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = I_2.$$

1.b) Méthode 1 — Utiliser la relation de la question précédente

Si λ est une valeur propre réelle de A et si $v \neq 0$ vérifie $Av = \lambda v$, alors $A^2v = \lambda^2v$.

Comme $A^2 = I_2$, il vient $(\lambda^2 - 1)v = 0$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$. Réciproquement :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont non nuls ; les valeurs propres sont donc exactement 1 et -1 .

Méthode 2 — Résoudre directement l'équation propre

Pour $v = (x, y) \neq (0, 0)$, l'équation $Av = \lambda v$ équivaut à $y = \lambda x$ et $x = \lambda y$. Si $x = 0$, la première égalité entraîne $y = 0$, ce qui est exclu. Ainsi $x \neq 0$ et $x = \lambda^2 x$ implique $\lambda^2 = 1$. Pour $\lambda = 1$, les solutions sont (x, x) ; pour $\lambda = -1$, elles sont $(x, -x)$, avec $x \neq 0$ pour obtenir un vecteur propre. Les deux valeurs sont donc réalisées.

La première méthode exploite efficacement une relation matricielle connue ; la seconde fournit en même temps les sous-espaces propres.

1.c) Méthode 1 — Construire une base de vecteurs propres

Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont associés à des valeurs propres distinctes ; ils sont donc

linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^2$. Avec $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a

$$P_2^2 = 2I_2, \text{ donc } P_2^{-1} = P_2/2, \text{ et :}$$

$$P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable.

Méthode 2 — Utiliser la symétrie

La matrice A est réelle et ${}^tA = A$. Le résultat admis du programme selon lequel toute matrice symétrique réelle est diagonalisable s'applique donc. Il donne directement la diagonalisabilité. La première méthode est constructive et permettra de calculer des puissances ; la seconde reconnaît une structure suffisante sans calcul supplémentaire.

2.a) Code adapté en Python.

La matrice P est inversible : ses deux premières colonnes sont les vecteurs propres indépendants de la question 1 et sa troisième colonne vaut $(0, 0, 1)$. La sortie donne $P^{-1}BP = D$, avec $D = \text{diag}(1, -1, 1)$. Pour tout réel λ , les équations $BX = \lambda X$ et $D(P^{-1}X) = \lambda P^{-1}X$ sont équivalentes ; comme P^{-1} préserve les vecteurs non nuls, B et D ont les mêmes valeurs propres. Celles-ci sont exactement 1 et -1 .

Voici le code complet correspondant :

Python

```
import numpy as np

B = np.array([[0, 1, 0], [1, 0, 0], [0, 0, 1]])
P = np.array([[1, 1, 0], [1, -1, 0], [0, 0, 1]])
print(np.dot(np.dot(np.linalg.inv(P), B), P))
```

Le calcul a été exécuté ; il renvoie bien la matrice diagonale annoncée.

2.b) Méthode 1 — Lire les colonnes de la matrice de passage

L'égalité $BP = PD$ montre que les première et troisième colonnes de P sont des

vecteurs propres associés à 1, et la deuxième un vecteur propre associé à -1 . Ces trois colonnes forment une base. Par conséquent :

$$E_1(B) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1)), \quad E_{-1}(B) = \text{Vect}((1, -1, 0)).$$

Les familles affichées sont des bases des sous-espaces propres correspondants.

Méthode 2 — Résoudre les deux systèmes numériques

Pour $X = (x, y, z)$, on a $BX = (y, x, z)$. L'équation $BX = X$ impose uniquement $y = x$; ses solutions sont $(x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Les deux vecteurs indiqués sont indépendants. L'équation $BX = -X$ impose $y = -x$ et $z = -z$, donc $z = 0$; ses solutions sont $x(1, -1, 0)$. Le vecteur générateur est non nul. On retrouve les deux bases précédentes.

La lecture de P valorise la sortie informatique ; les systèmes permettent de vérifier directement les espaces obtenus.

3.a) Question adaptée au programme actuel : l'indication permet un comptage élémentaire, sans résultat général de dénombrement à supposer connu.

Une matrice d'ordre n comporte n^2 coefficients. On choisit le premier coefficient de deux façons, puis le suivant de deux façons indépendamment du choix précédent, et ainsi de suite. Il y a donc :

$$|\mathcal{B}_n(\mathbb{R})| = 2^{n^2}.$$

3.b) Question adaptée au programme actuel : le choix successif des positions est indiqué.

La première ligne comporte un unique 1, dont la colonne se choisit de n façons. La deuxième ligne doit placer son 1 dans une autre colonne, soit $n - 1$ possibilités. Après les $k - 1$ premières lignes, $k - 1$ colonnes sont utilisées, donc la ligne k a $n - k + 1$ choix. Chaque suite de choix construit exactement une matrice convenable et chaque telle matrice détermine cette suite. Le nombre cherché est :

$$n(n-1)\cdots 1 = n!.$$

Le raisonnement inclut $n = 1$, pour lequel il existe une seule matrice, (1).

4.a) Question adaptée au programme actuel : on travaille dans l'espace concret $E = \mathbb{R}^n$.

Soit M la matrice de u dans la base canonique. L'hypothèse devient $M^2 = I_n$ et :

$$(M + I_n)(M - I_n) = M^2 - I_n = 0.$$

Si $y \in \text{Im}(u - \text{id})$, il existe x tel que $y = (u - \text{id})(x)$. Alors $(u + \text{id})(y) = 0$, ce qui signifie $y \in F$. Ainsi $\text{Im}(u - \text{id}) \subset F$.

4.b) Le théorème du rang appliqué à $u - \text{id}$ donne :

$$\text{rg}(u - \text{id}) + \dim \text{Ker}(u - \text{id}) = n.$$

Or $\text{Ker}(u - \text{id}) = G$ et l'inclusion de la question 4.a) entraîne $\text{rg}(u - \text{id}) \leq p$. Par conséquent $n - q \leq p$, donc $p + q \geq n$.

4.c) Méthode 1 — Utiliser les dimensions et l'indépendance

Tout vecteur $v \in F \cap G$ vérifie simultanément $u(v) = -v$ et $u(v) = v$. D'où $2v = 0$, puis $v = 0$.

Considérons une relation

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^q \beta_j g_j = 0.$$

Le vecteur

$$v = \sum_i \alpha_i f_i = - \sum_j \beta_j g_j$$

appartient à $F \cap G$, donc est nul. Les deux familles étant des bases, tous les coefficients sont nuls. La famille concaténée est donc libre. Elle comporte $p + q$ vecteurs dans un espace de dimension n , donc $p + q \leq n$. Avec 4.b), on obtient $p + q = n$: cette famille libre de n vecteurs est une base de E .

Méthode 2 — Écrire une décomposition explicite

Pour tout $x \in E$, posons $x_F = (x - u(x))/2$ et $x_G = (x + u(x))/2$. L'hypothèse $u^2 = \text{id}$ donne $u(x_F) = -x_F$ et $u(x_G) = x_G$; ainsi $x_F \in F$, $x_G \in G$ et $x = x_F + x_G$. Les deux bases réunies engendrent donc E . L'intersection $F \cap G$ est nulle par le calcul précédent; la même relation linéaire montre que leur réunion est libre. Elle constitue donc une base et $p + q = n$.

La première méthode réutilise le théorème du rang; la seconde fournit les composantes concrètes d'un vecteur sans invoquer de théorie abstraite des décompositions.

4.d) Comme $u(g_1) = g_1$ et $u(f_1) = -f_1$, la linéarité donne :

$$u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1, \quad u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1.$$

4.e) Puisque $p < q$, on peut associer chaque f_i à un g_i , pour $1 \leq i \leq p$. Considérons la famille :

$$\mathcal{C} = (g_1 - f_1, g_1 + f_1, \dots, g_p - f_p, g_p + f_p, g_{p+1}, \dots, g_q).$$

Chaque paire permet de retrouver g_i comme la demi-somme et f_i comme la demi-différence du deuxième et du premier vecteur. Comme la famille de 4.c) est une base, $\mathcal{C}$ est génératrice. Elle comporte $2p + (q - p) = n$ vecteurs, donc est une base.

Pour tout $i \leq p$, le calcul de 4.d) donne $u(g_i - f_i) = g_i + f_i$ et $u(g_i + f_i) = g_i - f_i$. Pour $j > p$, $u(g_j) = g_j$. Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \text{diag} \left(\underbrace{A, \dots, A}_{p \text{ blocs}}, I_{q-p} \right).$$

Tous les coefficients de cette matrice valent 0 ou 1. Elle appartient donc à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$, comme demandé.

Problème

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1.a) La fonction $G_{a,b}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec :

$$G'_{a,b}(x) = -(a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante. On a $G_{a,b}(0) = 1$ et $G_{a,b}(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, puisque $a, b > 0$. Le théorème de la bijection, appliqué sur cet intervalle, montre que son image est exactement $]0, 1]$ et qu'elle y réalise une bijection.

1.b) L'équation s'écrit $bx^2 + 2ax - 2y = 0$. Son discriminant est $4a^2 + 8by > 0$. Comme $b > 0$, elle possède exactement les deux solutions :

$$x_- = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2by}}{b}, \quad x_+ = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}.$$

Pour $y > 0$, la racine carrée est strictement supérieure à a ; ainsi $x_- < 0 < x_+$.

1.c) Pour $u \in [0, 1[$, le nombre $1 - u$ appartient à $]0, 1]$. L'équation $G_{a,b}(x) = 1 - u$, avec $x \geq 0$, équivaut à :

$$ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(1 - u).$$

Si $u > 0$, le second membre est strictement positif : on retient la racine x_+ de 1.b). Si $u = 0$, la solution non négative est $x = 0$, et la même formule convient. Ainsi :

$$G_{a,b}^{-1}(1 - u) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(1 - u)}}{b}.$$

2.a) Pour tout $x \geq 0$, on a $0 < G_{a,b}(x) \leq e^{-ax}$. La fonction $G_{a,b}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = 1/a < +\infty$ car $a > 0$. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives donne donc la convergence de l'intégrale demandée.

2.b) La densité d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, s'écrit $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x - m)^2/(2\sigma^2))$. Ici, on reconnaît $m = -a/b$ et $\sigma^2 = 1/b > 0$. La fonction f est donc une densité de la loi :

$$\mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right).$$

Son espérance vaut $-a/b$ et sa variance $1/b$.

2.c) On complète le carré :

$$-ax - \frac{b}{2}x^2 = -\frac{b}{2}\left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a^2}{2b}.$$

Il s'ensuit que $G_{a,b}(x) = \sqrt{2\pi/b} \exp(a^2/(2b))f(x)$. Pour une variable T de densité f , la variable $\sqrt{b}(T + a/b)$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = P(T \geq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right).$$

L'égalité $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ est la symétrie de la loi normale centrée réduite. En intégrant l'identité reliant $G_{a,b}$ à f , on obtient bien :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right).$$

3.a) La fonction $f_{a,b}$ est positive ou nulle, continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et admet en 0 les limites finies 0 à gauche et a à droite. Pour tout $T > 0$, la relation $f_{a,b}(x) = -G'_{a,b}(x)$ sur $[0, T]$ donne :

$$\int_0^T f_{a,b}(x) dx = G_{a,b}(0) - G_{a,b}(T) = 1 - G_{a,b}(T).$$

Lorsque $T \rightarrow +\infty$, le dernier terme tend vers 1. La fonction étant nulle sur $] -\infty, 0[$, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Elle est donc une densité de probabilité.

3.b) L'intégration par parties doit être effectuée d'abord sur le segment $[0, T]$. Comme $G_{a,b}$ est de classe C^1 sur ce segment :

$$\int_0^T x f_{a,b}(x) dx = - \int_0^T x G'_{a,b}(x) dx = -T G_{a,b}(T) + \int_0^T G_{a,b}(x) dx.$$

On a $0 \leq T G_{a,b}(T) \leq T e^{-aT} \rightarrow 0$ par croissance comparée. L'intégrale de droite converge d'après 2.a). Il en résulte que l'intégrale de $x f_{a,b}(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge. Comme $x f_{a,b}(x) \geq 0$ sur le support de X , il s'agit aussi de convergence absolue : l'espérance existe. En passant à la limite :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx.$$

4.a) Comme $Y \geq 0$ presque sûrement, $X \geq 0$ presque sûrement. Pour $x \geq 0$, les deux membres $\sqrt{a^2 + 2bY}$ et $a + bx$ sont non négatifs; on peut donc les élever au carré en conservant l'équivalence :

$$[X \geq x] = [\sqrt{a^2 + 2bY} \geq a + bx] = \left[Y \geq ax + \frac{b}{2}x^2 \right].$$

Le seuil est non négatif, et la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre 1 vaut $P(Y \geq t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$. On en déduit :

$$P(X \geq x) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = G_{a,b}(x).$$

4.b) L'application $y \mapsto (-a + \sqrt{a^2 + 2by})/b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour chaque $x \geq 0$, l'événement $X = x$ équivaut donc à $Y = ax + bx^2/2$, de probabilité nulle. La fonction de répartition est ainsi :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - G_{a,b}(x) & x \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 hors de 0, sa dérivée y étant $f_{a,b}$. La variable X admet donc la densité $f_{a,b}$ et suit $\mathcal{E}_\ell(a, b)$.

4.c) Méthode 1 — Utiliser directement la fonction de répartition

Posons $V = G_{a,b}^{-1}(1 - U)$. La fonction $G_{a,b}^{-1}$ est décroissante. Pour $x \geq 0$, on a :

$$[V \leq x] = [1 - U \geq G_{a,b}(x)] = [U \leq 1 - G_{a,b}(x)].$$

Le seuil $1 - G_{a,b}(x)$ appartient à $[0, 1[$; l'uniformité de U donne $P(V \leq x) = 1 - G_{a,b}(x)$. Pour $x < 0$, cette probabilité vaut 0 car $V \geq 0$. La fonction de répartition est celle de 4.b), donc V suit $\mathcal{E}_\ell(a, b)$.

Méthode 2 — Passer par une variable exponentielle

La variable $Y_0 = -\ln(1 - U)$ est bien définie presque sûrement et non négative. Pour $t \geq 0$:

$$P(Y_0 \leq t) = P(U \leq 1 - e^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

Pour $t < 0$, cette probabilité est nulle. Donc Y_0 suit la loi exponentielle de paramètre 1. La formule de 1.c) donne $V = (-a + \sqrt{a^2 + 2bY_0})/b$; les questions 4.a)-b) impliquent alors que V suit $\mathcal{E}_\ell(a, b)$.

La première méthode explique l'inversion d'une fonction de survie ; la seconde fournit directement la construction utilisée dans le programme de simulation.

5.a) Code adapté en Python.

La ligne `u = rd.random(n)` construit un tableau de longueur n dont les composantes simulent des variables uniformes sur $[0, 1[$ indépendantes. La valeur 1 est exclue, ce qui permet le calcul de `np.log(1-u)`.

5.b) Code adapté en Python.

La méthode 2 de 4.c) conduit à simuler $Y_0 = -\ln(1 - U)$. Le code complet est donc :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def grandlinexp(a, b, n):
    u = rd.random(n)
    y = -np.log(1-u)
    x = (-a + np.sqrt(a**2 + 2*b*y))/b
    return x
```

Les opérations sont appliquées composante par composante ; la fonction renvoie n simulations indépendantes de la loi voulue. Le tableau `y` simule des exponentielles de

paramètre 1 et le tableau x applique la transformation de 4.b). Ce code a été exécuté pour des paramètres strictement positifs, puis pour le cas de la question 6.

6. Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. La boucle du document utilise $a = 0$ alors que les définitions précédentes imposaient $a > 0$. L'extension précisée dans le sujet rend cet appel cohérent ; aucune division par a n'intervient dans la simulation.

Pour $a = 0$ et $b = 1$, la variable simulée s'écrit $X_0 = \sqrt{2Y_0}$, avec Y_0 exponentielle de paramètre 1. Sa fonction de survie est $e^{-x^2/2}$ pour $x \geq 0$, et sa densité vaut $xe^{-x^2/2}$ sur cet intervalle. L'intégration par parties de 3.b) reste valable : $Te^{-T^2/2} \rightarrow 0$ et l'intégrale gaussienne converge. Ainsi :

$$E(X_0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} (1 - \Phi(0)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Pour justifier une loi des grands nombres, on peut aussi vérifier l'existence d'une variance. Sur $[0, T]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^T x^3 e^{-x^2/2} dx = -T^2 e^{-T^2/2} + 2 \int_0^T x e^{-x^2/2} dx = -T^2 e^{-T^2/2} + 2(1 - e^{-T^2/2}).$$

Le passage à la limite montre que $E(X_0^2) = 2$ et $V(X_0) = 2 - \pi/2$. Pour une moyenne $\bar{X}_N$ de N simulations indépendantes, Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\bar{X}_N - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2 - \pi/2}{N\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Les six moyennes fournissent donc des approximations de $\sqrt{\pi/2} \simeq 1,25331$, avec une précision qui s'améliore en probabilité lorsque l'effectif augmente. Cela ne signifie pas que les erreurs des six valeurs diminuent nécessairement à chaque étape.

Voici le code complet de l'expérience :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def grandlinexp(a, b, n):
    u = rd.random(n)
    y = -np.log(1-u)
    x = (-a + np.sqrt(a**2 + 2*b*y))/b
    return x

for k in range(1, 7):
    print(np.mean(grandlinexp(0, 1, 10**k)))
```

Ce programme a été exécuté pour les six tailles prévues. Les résultats fluctuent d'une exécution à l'autre ; ils illustrent l'approximation et ne remplacent pas la justification probabiliste précédente.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

7. Pour $x \geq 0$, l'événement $M_n \geq x$ est l'intersection des événements $X_i \geq x$. Les variables X_i sont mutuellement indépendantes et leurs fonctions de survie valent $G_{a,b}$. Ainsi :

$$P(M_n \geq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x) = G_{a,b}(x)^n = \exp\left(-nax - \frac{nb}{2}x^2\right) = G_{na,nb}(x).$$

Le minimum n'a pas d'atome : pour tout réel x , l'événement $M_n = x$ est inclus dans l'union des événements $X_i = x$, tous de probabilité nulle. Sa fonction de répartition est donc nulle sur $] -\infty, 0[$ et égale à $1 - G_{na,nb}(x)$ pour $x \geq 0$. Comme $na, nb > 0$, on reconnaît la loi $\mathcal{E}_\ell(na, nb)$.

8.a) On a $0 \leq U_n \leq nh$ presque sûrement. Pour $x < 0$, $F_{U_n}(x) = 0$; pour $x \geq nh$, $F_{U_n}(x) = 1$. Si $0 \leq x < nh$, l'inégalité $x/n < h$ permet d'écrire :

$$[U_n \leq x] = [\min(h, M_n) \leq x/n] = [M_n \leq x/n].$$

La question 7 donne alors :

$$F_{U_n}(x) = 1 - G_{na,nb}(x/n) = 1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right).$$

On obtient exactement les trois expressions de l'énoncé.

8.b) Sur $] -\infty, 0[$, $]0, nh[$ et $]nh, +\infty[$, la fonction est continue. En 0, la limite à gauche vaut 0, sa valeur vaut $1 - e^0 = 0$ et la limite à droite vaut également 0 : elle est continue en 0.

En nh , on a :

$$\lim_{x \rightarrow nh^-} F_{U_n}(x) = 1 - \exp\left(-anh - \frac{bnh^2}{2}\right) = 1 - G_{a,b}(h)^n < 1 = F_{U_n}(nh).$$

La fonction n'est donc pas continue en nh . Elle y présente un saut strictement positif de taille $G_{a,b}(h)^n$. Elle est continue à droite en ce point, comme toute fonction de répartition. Il n'existe pas d'autre discontinuité.

8.c) La fonction de répartition d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$. Or F_{U_n} est discontinue en nh : U_n n'admet donc pas de densité. Son atome correspond à l'absence de décès avant h :

$$P(U_n = nh) = P(M_n \geq h) = G_{a,b}(h)^n > 0.$$

8.d) Pour $x < 0$, $F_{U_n}(x) = 0$ pour tout n . Pour $x \geq 0$ fixé, on a $x < nh$ dès que n est assez grand car $h > 0$. Par conséquent :

$$F_{U_n}(x) = 1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) \rightarrow 1 - e^{-ax}.$$

La fonction limite, nulle pour $x < 0$ et égale à $1 - e^{-ax}$ pour $x \geq 0$, est la fonction de répartition continue de la loi exponentielle de paramètre a . La convergence des fonctions de répartition en tous ses points de continuité prouve que U_n converge en loi vers cette loi. Aucune règle de calcul générale sur les convergences n'est nécessaire.

9.a) Pour une exponentielle de paramètre 1, $P(Y \leq c) = 1 - e^{-c}$ lorsque $c \geq 0$. La condition imposée donne donc :

$$c = -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Comme la loi est continue, $P(c \leq Y \leq d) = F_Y(d) - F_Y(c)$. Pour obtenir $1 - \alpha$, il faut $F_Y(d) = 1 - \alpha/2$, d'où :

$$d = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Les hypothèses $0 < \alpha < 1$ donnent $0 < \alpha/2 < 1 - \alpha/2 < 1$; ainsi $0 < c < d$. Ces valeurs vérifient les deux probabilités demandées.

9.b) Question adaptée au programme actuel : le sens particulier de l'intervalle asymptotique est défini dans l'énoncé. On le démontre à partir de la fonction de répartition explicite.

Les X_i sont strictement positifs presque sûrement; avec $h \geq 2$, cela implique $U_n > 0$ presque sûrement. On peut donc multiplier les inégalités par U_n , puis diviser par $a > 0$:

$$\left[\frac{c}{U_n} \leq a \leq \frac{d}{U_n}\right] = [c \leq aU_n \leq d] = \left[\frac{c}{a} \leq U_n \leq \frac{d}{a}\right].$$

Pour tout n assez grand pour que $nh > d/a$, les bornes c/a et d/a sont strictement inférieures à l'unique atome nh ; la loi n'a donc pas d'atome à ces bornes. La probabilité de couverture vaut alors :

$$F_{U_n}(d/a) - F_{U_n}(c/a) = \exp\left(-c - \frac{bc^2}{2na^2}\right) - \exp\left(-d - \frac{bd^2}{2na^2}\right).$$

En passant à la limite, elle tend vers $e^{-c} - e^{-d} = (1 - \alpha/2) - \alpha/2 = 1 - \alpha$. L'intervalle proposé a donc le niveau asymptotique annoncé. Cette preuve ne suppose ni indépendance entre les bornes ni transformation générale d'une convergence en loi.

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

10.a) Les variables S_i et D_i sont bornées, donc admettent tous leurs moments. La variable S_i est une indicatrice; ainsi :

$$E(S_i) = P(X_i \geq h) = G_{a,b}(h).$$

Comme $h \geq 2 > 1$, les conditions $X_i \geq h$ et $X_i \leq 1$ sont incompatibles. Le produit $S_i D_i$ est donc identiquement nul, et $E(S_i D_i) = 0$.

10.b) Si $i \neq j$, S_i est une fonction de X_i et D_j une fonction de X_j . L'indépendance des X_i et le lemme des coalitions donnent l'indépendance de S_i et D_j .

Si $i = j$, on a $P(S_i = 1, D_i = 1) = 0$, tandis que :

$$P(S_i = 1)P(D_i = 1) = G_{a,b}(h)(1 - G_{a,b}(1)) > 0.$$

En effet $G_{a,b}(h) > 0$ et $G_{a,b}(1) = e^{-a-b/2} \in]0, 1[$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes. Les couples cherchés sont exactement ceux pour lesquels $i \neq j$.

10.c) Par la formule de Koenig-Huygens et 10.a) :

$$\text{Cov}(S_i, D_i) = E(S_i D_i) - E(S_i)E(D_i) = -G_{a,b}(h)(1 - G_{a,b}(1)).$$

Pour $i \neq j$, la covariance est nulle par indépendance. La bilinéarité de la covariance, applicable aux variables bornées considérées, donne :

$$\text{Cov}(\bar{S}_n, \bar{D}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(S_i, D_j) = -\frac{G_{a,b}(h)(1 - G_{a,b}(1))}{n}.$$

La covariance est strictement négative. Son signe était prévisible : pour un même individu, survivre au moins h années exclut un décès au cours de la première année. Les indicatrices correspondantes s'opposent, tandis que les individus différents n'apportent aucune covariance.

11.a) Question adaptée au programme actuel : les notions de sans-biais et de convergence sont définies dans le sujet ; on établit ici les résultats particuliers.

Posons $p_h = G_{a,b}(h) \in]0, 1[$. Les S_i sont des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p_h , puisqu'elles sont des fonctions identiques des X_i indépendants de même loi. Elles admettent espérance p_h et variance $p_h(1 - p_h)$.

La moyenne $\bar{S}_n$ est une fonction de l'échantillon ne dépendant pas des paramètres inconnus. C'est donc un estimateur de p_h , et :

$$E(\bar{S}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(S_i) = p_h.$$

Cet estimateur est sans biais.

Méthode 1 — Donner une majoration explicite de l'erreur

L'indépendance donne $V(\bar{S}_n) = p_h(1 - p_h)/n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev entraîne :

$$P(|\bar{S}_n - p_h| \geq \varepsilon) \leq \frac{p_h(1 - p_h)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

L'estimateur est donc convergent au sens défini dans l'énoncé.

Méthode 2 — Appliquer la loi faible des grands nombres

Les S_i sont indépendantes, ont toutes la même espérance p_h et la même variance finie $p_h(1 - p_h)$. Les hypothèses de la loi faible des grands nombres sont donc satisfaites. Elle donne directement, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|\bar{S}_n - p_h| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$.

La première méthode fournit en plus une borne numérique pour un effectif donné ; la seconde identifie la situation générale d'une moyenne empirique.

11.b) Question adaptée au programme actuel : on utilise les définitions particulières données dans le sujet.

Posons $p_d = 1 - G_{a,b}(1) \in]0, 1[$. Les D_i sont des variables de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre p_d . En effet $P(D_i = 1) = P(X_i \leq 1) = 1 - G_{a,b}(1)$ et les X_i sont indépendants. Ainsi :

$$E(\overline{D}_n) = p_d, \quad V(\overline{D}_n) = \frac{p_d(1-p_d)}{n}.$$

La variable $\overline{D}_n$ est donc un estimateur sans biais du paramètre $1 - G_{a,b}(1)$, c'est-à-dire de la probabilité de décès au cours de la première année.

Méthode 1 — Bienaymé-Tchebychev

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de la variance et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donnent :

$$P(|\overline{D}_n - p_d| \geq \varepsilon) \leq \frac{p_d(1-p_d)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

La suite d'estimateurs est donc convergente vers p_d .

Méthode 2 — Loi faible des grands nombres

Les D_i ont même espérance p_d , même variance finie $p_d(1-p_d)$, et sont indépendantes. La loi faible des grands nombres appliquée à leur moyenne affirme précisément que $P(|\overline{D}_n - p_d| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. On retrouve la convergence, sans la borne quantitative de la première méthode.

12.a.i) Les arguments des logarithmes sont strictement positifs : $1 - \overline{D}_n + 1/n \geq 1/n > 0$ et $\overline{S}_n + 1/n \geq 1/n > 0$. Les variables Z_n et R_n sont donc bien définies, y compris lorsqu'aucun individu ne survit ou que tous sont décédés avant un an.

Résultat admis dans cette version adaptée : pour tout $\delta > 0$,

$$P(|Z_n - z(a, b)| \geq \delta) \rightarrow 0, \quad P(|R_n - r(a, b)| \geq \delta) \rightarrow 0.$$

Ces deux convergences, déjà admises dans le document source, seront utilisées en 12.b). Aucun théorème général de composition de convergences n'est invoqué.

Posons $A_n = Z_n - z(a, b)$ et $C_n = R_n - r(a, b)$. L'inégalité triangulaire donne, pour chaque issue :

$$|\lambda A_n - \mu C_n| \leq \lambda |A_n| + \mu |C_n|,$$

car $\lambda, \mu > 0$. Si le membre de gauche est supérieur ou égal à ε , le membre de droite l'est également. C'est exactement l'inclusion demandée.

12.a.ii) Si simultanément $|A_n| < \varepsilon/(2\lambda)$ et $|C_n| < \varepsilon/(2\mu)$, alors $\lambda |A_n| + \mu |C_n| < \varepsilon$. Par contraposée :

$$[\lambda |A_n| + \mu |C_n| \geq \varepsilon] \subset [|A_n| \geq \varepsilon/(2\lambda)] \cup [|C_n| \geq \varepsilon/(2\mu)].$$

En combinant cette inclusion avec 12.a.i), puis en utilisant la croissance de la probabilité et la majoration de la probabilité d'une union par la somme des probabilités, on obtient :

$$\begin{aligned} P(|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geq \varepsilon) &\leq P\left(|Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right) \\ &+ P\left(|R_n - r(a, b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\mu}\right). \end{aligned}$$

Cette majoration ne nécessite aucune indépendance entre Z_n et R_n .

12.b) Question adaptée au programme actuel : la convergence demandée est démontrée à partir des majorations de probabilités et des deux convergences particulières admises.

Les définitions de $G_{a,b}$ donnent :

$$z(a, b) = -a - \frac{b}{2}, \quad r(a, b) = -ah - \frac{bh^2}{2}.$$

Comme $h \geq 2$, les nombres $\lambda = 2/(h-1)$ et $\mu = 2/(h(h-1))$ sont strictement positifs.

Le calcul de la combinaison des paramètres donne :

$$\lambda z(a, b) - \mu r(a, b) = \frac{-2a - b}{h-1} + \frac{2a + bh}{h-1} = b.$$

La statistique $B_n = \lambda Z_n - \mu R_n$ ne dépend que de l'échantillon et de h , qui est connu ; elle constitue donc bien un estimateur de b . Pour tout $\varepsilon > 0$, la question 12.a.ii) entraîne :

$$P(|B_n - b| \geq \varepsilon) \leq P\left(|Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\varepsilon(h-1)}{4}\right) + P\left(|R_n - r(a, b)| \geq \frac{\varepsilon h(h-1)}{4}\right).$$

Les deux seuils sont strictement positifs et indépendants de n . Les convergences admises font tendre les deux termes vers 0. Ainsi $P(|B_n - b| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$, ce qui prouve la convergence de l'estimateur vers b . Il n'est pas demandé qu'il soit sans biais ni que ses réalisations soient toujours positives.

Relevé des adaptations

- Exercice 2 : code adapté en Python ; commandes matricielles documentées, sortie numérique conservée.
- Exercice 3.a)-b) : indications de choix successifs ajoutées pour rendre les comptages élémentaires explicites, sans chapitre général de dénombrement.
- Exercice 4.a)-e) : espace vectoriel général remplacé par l'espace concret $\mathbb{R}^n$; hypothèse d'involution, dimensions, numéros et construction de la base conservés. Les calculs peuvent se lire sur la matrice de l'application.
- Problème 5.a)-b) : code adapté en Python ; blanc conservé dans le sujet, fonction entièrement complétée dans le corrigé, documentation des tableaux et des fonctions fournie.
- Problème 6 : code adapté en Python ; domaine étendu explicitement au seul cas $a = 0$, $b = 1$ utilisé par la boucle originale, afin de rectifier son incompatibilité avec l'hypothèse générale $a > 0$. La loi correspondante est définie et la limite des moyennes justifiée.

- Problème 9.b) : définition locale du niveau de confiance asymptotique ajoutée et division par U_n explicitée sur l'événement de probabilité 1 où $U_n > 0$; couverture établie par calcul des probabilités.
- Problème 11.a)-b) et 12 : notions de biais et de convergence des estimateurs définies dans le préambule de la partie III; démonstrations par Bienaymé-Tchebychev ou majorations explicites. Les deux convergences logarithmiques déjà admises dans l'original sont conservées avec leur sens précis.