



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2016

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M .

On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.

On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, avec $q \in \mathbb{N}^*$, on admet que ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$. On pose $A = X {}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.
 - a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
 - b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$. Déterminer $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$; donner une base de $\text{Im } f$ et préciser la dimension de $\text{Ker } f$.
 - c) Calculer la matrice AX . Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On suppose que n et p vérifient $1 \leq p \leq n$. Soit $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, \dots, V_p$.

Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.

 - a) Justifier que le rang de V est égal à p . Déterminer $\text{Ker } g$.
 - b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tY {}^tVVY = 0$.

c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Problème

On s'intéresse à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir des deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème, on note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien. On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $z = x/y$.

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I. Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution)

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$.

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{1/\theta}.$$

1. Exemple. Dans cette question uniquement, on prend $\theta = -1$ et $c = 1/2$.

a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = 2xy/(x + y)$. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et calculer, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f(x, y)$.

b) Soient w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $w(t) = 2t/(1 + t)$ et $U(t) = w(t) - tw'(t)$. Dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

- c) On rappelle que $z = x/y$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = yw(z)$.
- d) Vérifier, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les relations $\partial_1 f(x, y) = w'(z)$ et $\partial_2 f(x, y) = U(z)$.
- 2.a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.
- b) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, calculer $\partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f(x, y)$.
- c) Déterminer, pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \partial_1 f(x, y)$. De même, déterminer, pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \partial_2 f(x, y)$.
3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x, y) = \partial_1 f(x, y) / \partial_2 f(x, y)$, appelée taux marginal de substitution technique, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \frac{c}{1-c} t^{-1+\theta}$.
- a) Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x, y)$ en fonction de $g(z)$.
- b) Pour tout $t > 0$, on pose $s(t) = -g(t) / (tg'(t))$. Calculer $s(z)$, appelée élasticité de substitution. Conclusion.
4. Soient w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $w(t) = f(t, 1)$ et $U(t) = w(t) - tw'(t)$.
- a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = yw(z)$.
- b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser $\lim_{t \rightarrow 0^+} U(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II. Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\Psi(1, 1) = 1$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \Psi(x, y)$.

De plus, on suppose que, pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \partial_1 \Psi(x, y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que, pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \partial_2 \Psi(x, y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $v(t) = \Psi(t, 1)$.

a) Justifier que v est de classe C^2 , strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = v(t) - tv'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geq 0$. Déterminer, pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu < 1$.

c) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, $\Psi(x, y) = yv(z)$.

6.a) Pour tout $t > 0$, on pose $h(t) = v'(t)/\varphi(t)$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $\partial_1 \Psi(x, y)/\partial_2 \Psi(x, y) = h(z)$.

b) On suppose de plus, pour cette question et la question 7, que $v''(t) < 0$ pour tout $t > 0$. Pour tout $t > 0$, on pose $\sigma(t) = -h(t)/(th'(t))$. Justifier que $\sigma(t)$ est bien définie et déterminer son signe.

7. Les fonctions σ et h sont celles définies dans la question 6. On suppose que σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose que $\sigma_0 \neq 1$. On pose $r = 1 - 1/\sigma_0$.

a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r}h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que $\forall t > 0$, $h(t) = h(1)t^{r-1}$.

b) Par une méthode analogue à celle de la question 7.a), établir la relation

$$\forall t > 0, \quad v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)} \right)^{1/r}.$$

c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0, 1[$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad \Psi(x, y) = (ax^r + (1 - a)y^r)^{1/r}.$$

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions 3.b) et 7.c) ?

8. Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $] - \infty, 1[\setminus \{0\}$ par

$$S_t(r) = (at^r + (1 - a))^{1/r}.$$

a) On pose $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers zéro.

b) Pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose $N_{(x,y)}(r) = yS_z(r)$ et

$F(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} N_{(x,y)}(r)$. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, $F(x, y) = x^a y^{1-a}$, fonction de production de Cobb-Douglas.

Partie III. Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif. On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

La composante déterministe est une fonction de production f de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$, $f(x, y) = Bx^a y^{1-a}$.

La composante aléatoire est une variable aléatoire de la forme $\exp(R)$ où R suit la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.

La production totale Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que $Q = Bx^a y^{1-a} \exp(R)$.

Les variables Q et R sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $b = \ln B$, $u = \ln x - \ln y$ et $T = \ln Q - \ln y$. On a donc $T = au + b + R$.

On sélectionne n entreprises, avec $n \geq 1$, qui produisent le bien considéré à l'époque donnée. On mesure, pour chaque entreprise $i \in \{1, \dots, n\}$, la quantité de travail x_i , la quantité de capital y_i et la quantité produite Q_i^* . Pour tout i , on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.

La production totale de l'entreprise i est une variable aléatoire $Q_i = Bx_i^a y_i^{1-a} \exp(R_i)$, où $R_1, \dots, R_n$ sont indépendantes et de même loi que R ; le réel Q_i^* est une réalisation de Q_i .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $u_i = \ln x_i - \ln y_i$, $T_i = \ln Q_i - \ln y_i$ et $t_i = \ln Q_i^* - \ln y_i$. Ainsi $T_i = au_i + b + R_i$ et t_i est une réalisation de T_i .

On rappelle les définitions et résultats suivants. Pour une série statistique $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$, sa moyenne et sa variance empiriques sont

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i, \quad s_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 - \bar{v}^2.$$

Pour deux séries (v_i) et (w_i) , leur covariance empirique est

$$\text{Cov}(v, w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(w_i - \bar{w}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i w_i - \bar{v} \bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}) w_i.$$

9.a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}(au_i + b, \sigma^2)$.

b) Les variables aléatoires $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont-elles indépendantes ?

Pour tout i , soit φ_i la densité continue sur $\mathbb{R}$ de T_i :

$$\forall d \in \mathbb{R}, \quad \varphi_i(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d - (au_i + b))^2}{2\sigma^2}\right).$$

Soient $\mathcal{F} =]0, 1[\times \mathbb{R}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et M la fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$M(a, b) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \varphi_i(t_i) \right).$$

On suppose $0 < \text{Cov}(u, t) < s_u^2$. Le paramètre σ^2 est fixé dans l'étude de M .

10.a) Calculer le gradient $\nabla M(a, b)$ en tout point $(a, b) \in \mathcal{F}$.

b) En déduire que M admet sur $\mathcal{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$.

c) Exprimer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\text{Cov}(u, t)$, s_u^2 , $\bar{t}$ et $\bar{u}$. Les réels $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations de a et b par la méthode du maximum de vraisemblance, qui consiste ici à maximiser M .

11.a) Soit $\nabla^2 M(a, b)$ la matrice hessienne de M en $(a, b) \in \mathcal{F}$. Montrer que

$$\nabla^2 M(a, b) = -\frac{n}{\sigma^2} \begin{pmatrix} s_u^2 + \bar{u}^2 & \bar{u} \\ \bar{u} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Étudier le signe de ses valeurs propres sans calcul de déterminant, puis en déduire que M admet au point $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum local.

12. Soit $(h, k) \neq (0, 0)$ tel que $(\hat{a} + h, \hat{b} + k) \in \mathcal{F}$. Calculer $M(\hat{a} + h, \hat{b} + k) - M(\hat{a}, \hat{b})$. En déduire que M admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un maximum global.

13. En Python, on emploie les commandes suivantes. Pour un tableau NumPy à une dimension, `np.mean(v)` calcule la moyenne et `np.var(v)` la variance à diviseur égal au nombre d'éléments. La covariance empirique de deux tableaux de même longueur est calculée par `np.mean((v-np.mean(v))*(w-np.mean(w)))`. La multiplication des tableaux et les opérations avec un nombre s'effectuent composante par composante.

La commande `plt.plot(x, y, "kD", markersize=4)` représente les couples de coordonnées par des losanges noirs; `plt.plot(x, y, "k-")` les relie par des segments noirs. Les options `"k+"` et `linestyle="none"` représentent uniquement des signes d'addition noirs. `plt.show()` affiche la figure.

On a relevé, pour $n = 16$ entreprises, les deux séries statistiques reproduites aux lignes (1) et (2). La ligne (5) du code suivant est incomplète. Les importations et les calculs préparatoires ne sont pas numérotés.

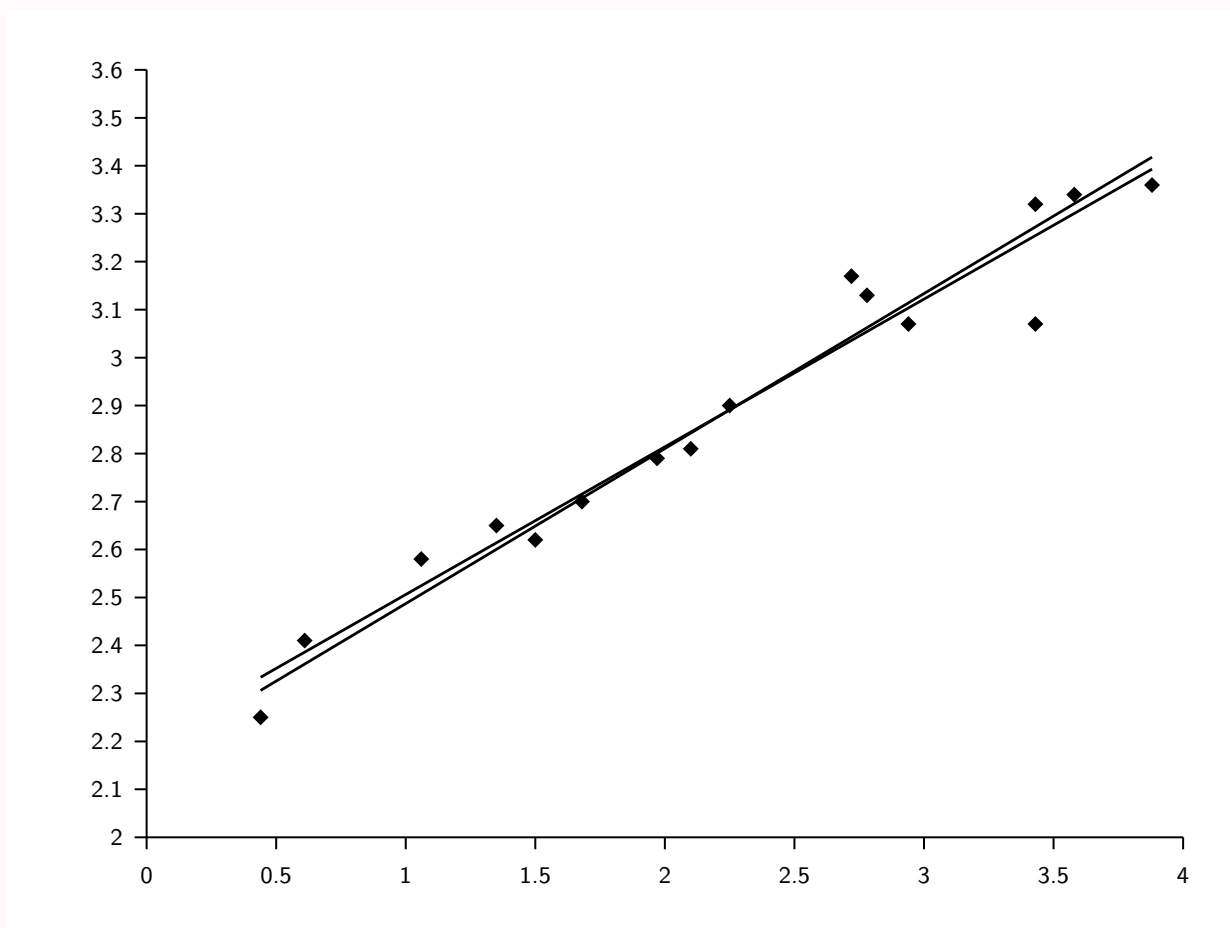
Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

u = np.array([1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
              1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58]) # (1)
t = np.array([2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
              2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34]) # (2)

c_ut = np.mean((u - np.mean(u)) * (t - np.mean(t)))
plt.plot(u, t, "kD", markersize=4, linestyle="none") # (3)
plt.plot(u, c_ut / np.var(u) * u + np.mean(t)
         - c_ut / np.var(u) * np.mean(u), "k-") # (4)
plt.plot(u, ..., "k-") # (5) droite de régression de u en t
plt.show()
```

Le code précédent complété par la ligne (5) donne la figure suivante :

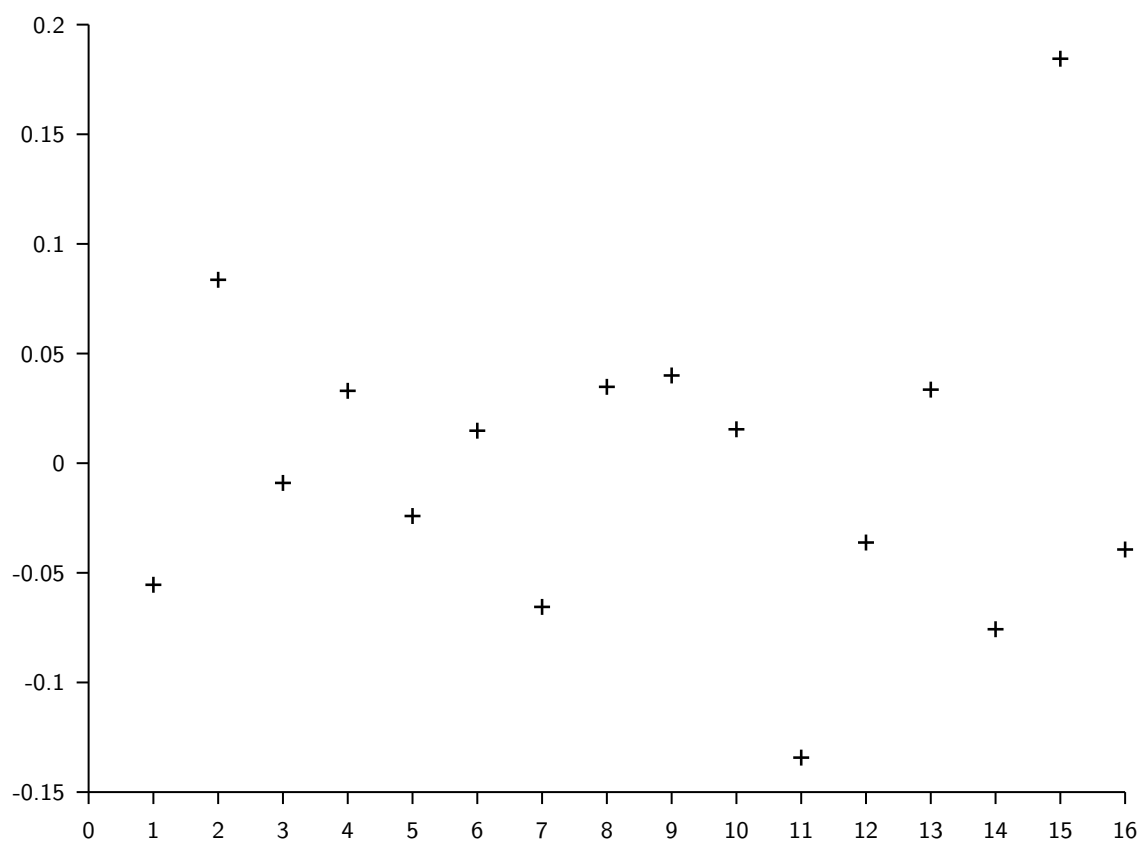


- a) Compléter la ligne (5) du code permettant d'obtenir la figure précédente. On donnera uniquement la ligne (5) complétée.
- b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.
- c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\bar{u}$ et $\bar{t}$.
- d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1 \leq i \leq 16}$ est-il plus proche de -1 , de 1 ou de 0 ?
- e) On reprend les lignes (1) et (2) du code précédent et le calcul de `c_ut`, puis on complète par les instructions suivantes. `np.arange(1, 17)` fournit le tableau des entiers de 1 à 16, la borne 17 étant exclue.

Python

```
a0 = c_ut / np.var(u) # (6)
b0 = np.mean(t) - a0 * np.mean(u) # (7)
t0 = a0 * u + b0 # (8)
e = t0 - t # (9)
p = np.arange(1, 17) # (10)
plt.plot(p, e, "k+", linestyle="none") # (11)
plt.show()
```

On obtient le graphique ci-dessous :



Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus ? Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

14. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \frac{1}{ns_u^2} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})T_i.$$

On conserve l'hypothèse $s_u^2 > 0$, qui impose en particulier $n \geq 2$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

- a) Calculer l'espérance $E(A_n)$ et la variance $V(A_n)$ de A_n . Préciser la loi de A_n .
- b) Le paramètre a est inconnu. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha) = 1 - \alpha/2$. Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.