



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2016

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1.a) Le coefficient de ligne i et de colonne j du produit $X^t X$ vaut $x_i x_j$. Ainsi

$$A = (x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0.$$

L'inégalité est stricte puisque $X \neq 0$. Les coefficients de A sont réels et $x_i x_j = x_j x_i$; la matrice A est donc symétrique réelle. Le théorème du programme sur les matrices symétriques réelles assure qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1.b) Pour toute colonne $Y = (y_i)$, on a

$$f(Y) = AY = X(^tXY) = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) X.$$

L'image est donc contenue dans $\text{Vect}(X)$. Comme $AX = \alpha X$ et $\alpha > 0$, on a $f(X/\alpha) = X$, d'où

$$\text{Im } f = \text{Vect}(X).$$

La famille à un élément (X) en est une base. Comme $X \neq 0$, $AY = 0$ équivaut à $^tXY = 0$, donc

$$\text{Ker } f = \left\{ (y_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \right\}.$$

Le rang vaut 1. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } f = n - 1$; en particulier, si $n = 1$, ce noyau est réduit à la colonne nulle.

1.c) L'associativité du produit donne $AX = X(^tXX) = \alpha X$: α est valeur propre et X lui est associé.

Si $AY = \lambda Y$ avec $Y \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, alors $Y = \lambda^{-1}AY$ appartient à l'image, donc $Y = \beta X$ avec $\beta \neq 0$. L'égalité $AY = \alpha Y$ impose alors $\lambda = \alpha$. De plus, $AY = \alpha Y$ implique

$Y = \alpha^{-1}AY \in \text{Vect}(X)$. Ainsi

$$E_\alpha(A) = \text{Vect}(X).$$

Si $n \geq 2$, le noyau de dimension $n - 1$ contient un vecteur non nul ; 0 est valeur propre, avec $E_0(A) = \text{Ker } f$. Ce sont les seules valeurs propres. Si $n = 1$, la seule valeur propre est $\alpha : 0$ n'est pas valeur propre.

2.a) Le rang de V est le rang de sa famille de colonnes. Cette famille étant libre de cardinal p , $\text{rg } V = p$. Pour $Y = (y_1, \dots, y_p)^t$, l'égalité $g(Y) = VY = 0$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^p y_j V_j = 0.$$

La liberté entraîne $y_j = 0$ pour tout j . Ainsi $\text{Ker } g = \{0\}$.

2.b) Si $VY = 0$, alors ${}^tY {}^tVVY = 0$. Réciproquement, la règle de transposition rappelée dans l'énoncé donne

$${}^tY {}^tVVY = {}^t(VY)(VY) = \sum_{i=1}^n (VY)_i^2.$$

Une somme de carrés réels est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul. Par conséquent, cette quantité est nulle si et seulement si $VY = 0$, ce qui établit l'équivalence.

2.c) Posons $C = {}^tVV \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Si $CY = 0$, alors ${}^tYCY = 0$, donc $VY = 0$ par 2.b), puis $Y = 0$ par 2.a). La matrice carrée C a un noyau nul ; l'application linéaire qu'elle représente est injective et, en dimension finie égale au départ et à l'arrivée, bijective. Ainsi ${}^tVV$ est inversible.

Problème

Partie I. Fonction de production CES

1.a) Pour $x, y > 0$, on a

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \right)^{-1} = \frac{2xy}{x+y}.$$

La fonction rationnelle obtenue est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{D}$, car $x + y > 0$. La règle du quotient donne

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{2y(x+y) - 2xy}{(x+y)^2} = \frac{2y^2}{(x+y)^2}, \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{2x^2}{(x+y)^2}.$$

1.b) On calcule successivement

$$w'(t) = \frac{2}{(1+t)^2}, \quad U(t) = \frac{2t}{1+t} - \frac{2t}{(1+t)^2} = \frac{2t^2}{(1+t)^2},$$

$$U'(t) = \frac{4t}{(1+t)^3} > 0, \quad U''(t) = \frac{4(1-2t)}{(1+t)^4}.$$

La fonction U est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec limite 0 en 0^+ et limite 2 en $+\infty$.

t	0^+		$+\infty$
$U'(t)$		+	
$U(t)$	0	$\nearrow$	2

Elle est convexe sur $]0, 1/2]$ et concave sur $[1/2, +\infty[$. Le changement de signe de U'' fournit un point d'inflexion d'abscisse $1/2$, d'ordonnée $U(1/2) = 2/9$.

1.c) Comme $z = x/y$,

$$yw(z) = y \frac{2x/y}{1 + x/y} = \frac{2xy}{x + y} = f(x, y).$$

1.d) En remplaçant t par $z = x/y$ dans les expressions obtenues,

$$w'(z) = \frac{2}{(1 + x/y)^2} = \frac{2y^2}{(x + y)^2} = \partial_1 f(x, y),$$

$$U(z) = \frac{2(x/y)^2}{(1 + x/y)^2} = \frac{2x^2}{(x + y)^2} = \partial_2 f(x, y).$$

2.a) Pour des bases strictement positives, les règles des puissances réelles donnent

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda^\theta (cx^\theta + (1 - c)y^\theta))^{1/\theta} = \lambda f(x, y).$$

La fonction est donc homogène de degré 1.

2.b) Posons $S = cx^\theta + (1 - c)y^\theta > 0$. Les fonctions puissance réelles sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$; les opérations et compositions définissent donc une fonction f de classe C^2 sur $\mathcal{D}$.

La dérivation donne

$$\partial_1 f(x, y) = cx^{\theta-1} S^{1/\theta-1}, \quad \partial_2 f(x, y) = (1 - c)y^{\theta-1} S^{1/\theta-1}.$$

2.c) Les deux expressions précédentes sont strictement positives. Pour étudier leur monotonie, on calcule les dérivées par rapport à leur variable respective :

$$\partial_{11}^2 f = c(\theta - 1)x^{\theta-2} S^{1/\theta-1} + c^2(1 - \theta)x^{2\theta-2} S^{1/\theta-2}.$$

En factorisant et en utilisant $S - cx^\theta = (1 - c)y^\theta$, on obtient

$$\partial_{11}^2 f = -c(1 - c)(1 - \theta)x^{\theta-2}y^\theta S^{1/\theta-2} < 0.$$

Le même calcul, en échangeant les deux variables et les coefficients c et $1 - c$, donne

$$\partial_{22}^2 f = -c(1 - c)(1 - \theta)x^\theta y^{\theta-2} S^{1/\theta-2} < 0.$$

Les facteurs autres que le signe moins sont strictement positifs, puisque $\theta < 1$. Ainsi, pour y fixé, $x \mapsto \partial_1 f(x, y)$ est strictement positive et strictement décroissante. Pour x fixé, $y \mapsto \partial_2 f(x, y)$ est strictement positive et strictement décroissante.

3.a) Le dénominateur est strictement positif d'après 2.c). Le quotient vaut

$$G(x, y) = \frac{c}{1-c} \frac{x^{\theta-1}}{y^{\theta-1}} = \frac{c}{1-c} z^{\theta-1} = g(z).$$

3.b) Comme $g'(t) = \frac{c}{1-c}(\theta-1)t^{\theta-2} < 0$, le quotient est défini pour tout $t > 0$ et

$$s(t) = -\frac{1}{\theta-1} = \frac{1}{1-\theta}.$$

En particulier, $s(z) = 1/(1-\theta)$. L'élasticité de substitution est strictement positive et constante, ce qui explique la dénomination CES.

4.a) Appliquons l'homogénéité avec $(z, 1)$ et $\lambda = y$:

$$f(x, y) = f(yz, y) = yf(z, 1) = yw(z).$$

4.b) Posons $d = 1 - c > 0$ et $F(t) = ct^\theta + d$. Alors

$$w(t) = F(t)^{1/\theta}, \quad w'(t) = ct^{\theta-1}F(t)^{1/\theta-1},$$

$$U(t) = F(t)^{1/\theta-1} (F(t) - ct^\theta) = dF(t)^{(1-\theta)/\theta}.$$

Une dérivation donne

$$U'(t) = dc(1-\theta)t^{\theta-1}F(t)^{1/\theta-2} > 0.$$

Une seconde dérivation, suivie de la factorisation de $dc(1-\theta)t^{\theta-2}F(t)^{1/\theta-3}$, donne

$$U''(t) = dc(1-\theta)t^{\theta-2}F(t)^{1/\theta-3} [-c\theta t^\theta - d(1-\theta)].$$

Si $0 < \theta < 1$, l'exposant $(1-\theta)/\theta$ est positif, $F(t) \rightarrow d$ en 0^+ et $F(t) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Par conséquent, U croît strictement de $d^{1/\theta}$ vers $+\infty$. Le facteur entre crochets est strictement négatif : U est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\theta < 0$, cet exposant est négatif, $F(t) \rightarrow +\infty$ en 0^+ et $F(t) \rightarrow d$ en $+\infty$. Ainsi U croît strictement de 0 vers $d^{1/\theta}$. Le signe de U'' est celui de $c(-\theta)t^\theta - d(1-\theta)$, expression strictement décroissante, de limite $+\infty$ en 0^+ et de limite strictement négative en $+\infty$. Elle s'annule uniquement en

$$t_* = \left(\frac{d(1-\theta)}{-c\theta} \right)^{1/\theta}.$$

La fonction U est donc convexe sur $]0, t_*]$ et concave sur $[t_*, +\infty[$; elle possède un point d'inflexion en t_* .

Cas	Limite en 0^+	Variation	Limite en $+\infty$
$0 < \theta < 1$	$(1 - c)^{1/\theta}$	$\nearrow$	$+\infty$
$\theta < 0$	0	$\nearrow$	$(1 - c)^{1/\theta}$

Partie II. Caractérisation des fonctions à élasticité constante

5.a) La restriction $v(t) = \Psi(t, 1)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $v'(t) = \partial_1 \Psi(t, 1) > 0$, donc v est strictement croissante. La fonction v' est strictement décroissante par hypothèse ; sa dérivée vérifie $v'' \leq 0$. Ainsi v est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.b) L'homogénéité permet d'écrire, pour $t, y > 0$,

$$\Psi(t, y) = y\Psi(t/y, 1) = yv(t/y).$$

En dérivant cette identité par rapport à y , puis en prenant $y = 1$, on trouve $\partial_2 \Psi(t, 1) = v(t) - tv'(t) = \varphi(t)$. L'hypothèse sur la seconde dérivée partielle d'ordre un entraîne donc $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

En outre, $\varphi'(t) = -tv''(t) \geq 0$, donc φ est croissante. Comme $v(1) = \Psi(1, 1) = 1$ et $v'(1) > 0$, on a

$$0 \leq \mu \leq \varphi(1) = 1 - v'(1) < 1.$$

Par conséquent, $\mu < 1$.

5.c) Avec $\lambda = y$ et $(z, 1) \in \mathcal{D}$, l'homogénéité donne

$$\Psi(x, y) = \Psi(yz, y) = y\Psi(z, 1) = yv(z).$$

6.a) Dérivons l'expression précédente, avec $z = x/y$. Comme $\partial z / \partial x = 1/y$ et $\partial z / \partial y = -z/y$, on obtient

$$\partial_1 \Psi(x, y) = v'(z), \quad \partial_2 \Psi(x, y) = v(z) - zv'(z) = \varphi(z).$$

Le dénominateur étant strictement positif, le quotient est $v'(z)/\varphi(z) = h(z)$.

6.b) Question adaptée au programme actuel. Une précision d'hypothèse corrige aussi un défaut de définition du quotient dans l'original : une fonction dérivable strictement décroissante peut avoir une dérivée nulle en certains points ; les hypothèses initiales seules donnent $v'' \leq 0$. L'hypothèse locale $v'' < 0$ garantit la définition de σ .

On sait $v' > 0$, $v > 0$ et $\varphi > 0$. En utilisant $\varphi' = -tv''$, la règle du quotient donne

$$h'(t) = \frac{v''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = \frac{v''(t)(\varphi(t) + tv'(t))}{\varphi(t)^2} = \frac{v(t)v''(t)}{\varphi(t)^2} < 0.$$

Ainsi $h(t) > 0$ et $th'(t) < 0$, donc $\sigma(t) = -h(t)/(th'(t))$ est bien définie et strictement positive pour tout $t > 0$.

7.a) D'après 6.b), $\sigma_0 > 0$. Ainsi $r = 1 - 1/\sigma_0 < 1$ et, puisque $\sigma_0 \neq 1$, $r \neq 0$. L'identité définissant σ_0 donne

$$h'(t) = -\frac{h(t)}{\sigma_0 t} = \frac{r-1}{t}h(t).$$

En dérivant ℓ , on obtient

$$\ell'(t) = (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}h'(t) = 0.$$

La fonction ℓ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$; sa valeur en 1 vaut $h(1)$. Il s'ensuit $h(t) = h(1)t^{r-1}$.

7.b) La relation obtenue en 7.a) permet de déterminer v en utilisant $v(1) = 1$.

Méthode 1 — Recherche d'une expression à dérivée nulle.

Posons $k = h(1) > 0$. L'égalité $v'(t)/(v(t) - tv'(t)) = kt^{r-1}$, dont tous les dénominateurs sont strictement positifs, équivaut à

$$(1 + kt^r)v'(t) = kt^{r-1}v(t).$$

La fonction $J(t) = v(t)(1 + kt^r)^{-1/r}$ est dérivable et

$$J'(t) = (1 + kt^r)^{-1/r-1} [(1 + kt^r)v'(t) - kt^{r-1}v(t)] = 0.$$

Elle est donc constante. Puisque $v(1) = 1$, on a $J(1) = (1 + k)^{-1/r}$, et finalement

$$v(t) = \left(\frac{1 + kt^r}{1 + k} \right)^{1/r}.$$

Méthode 2 — Intégration d'une dérivée logarithmique.

La même égalité donne, puisque $v(t) > 0$,

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{kt^{r-1}}{1 + kt^r} = \frac{1}{r} \frac{(1 + kt^r)'}{1 + kt^r}.$$

Intégrons sur le segment joignant 1 à t ; les fonctions intégrées y sont continues. On obtient

$$\ln v(t) - \ln v(1) = \frac{1}{r} [\ln(1 + kt^r) - \ln(1 + k)].$$

Avec $v(1) = 1$, l'exponentiation fournit la même formule. La première méthode suit l'indication de l'énoncé; la seconde reconnaît directement une primitive logarithmique, utile lorsque les variables sont séparables.

7.c) Définissons $a = k/(1 + k)$. Comme $k > 0$, on a $0 < a < 1$ et $1 - a = 1/(1 + k)$. La formule précédente s'écrit $v(t) = (at^r + 1 - a)^{1/r}$. Ainsi

$$\Psi(x, y) = y(a(x/y)^r + 1 - a)^{1/r} = (ax^r + (1 - a)y^r)^{1/r},$$

car $y > 0$ et les quantités élevées aux puissances réelles sont strictement positives.

7.d) La question 3.b) montre que toute fonction CES normalisée considérée a une élasticité constante $1/(1 - r) > 0$. Réciproquement, sous les hypothèses de la partie II,

notamment la précision assurant $v'' < 0$, une élasticité de substitution constante $\sigma_0 \neq 1$ impose une fonction CES avec $r = 1 - 1/\sigma_0$. Le coefficient a appartient à $]0, 1[$ et $r < 1$, $r \neq 0$. Cette caractérisation porte sur la famille normalisée par $\Psi(1, 1) = 1$; le cas $\sigma_0 = 1$ n'est pas traité par la division par r et motive l'étude limite suivante.

8.a) Pour $t > 0$ fixé, posons $K(r) = \ln(at^r + 1 - a)$, définie au voisinage de 0. La fonction est dérivable, $K(0) = 0$, et

$$K'(r) = \frac{at^r \ln t}{at^r + 1 - a}, \quad K'(0) = a \ln t.$$

Par la définition du nombre dérivé, $H_t(r) = K(r)/r$ tend vers $a \ln t$. La continuité de l'exponentielle entraîne

$$\lim_{r \rightarrow 0} S_t(r) = \exp(a \ln t) = t^a.$$

Le raisonnement traite les deux côtés de 0 et inclut $t = 1$, pour lequel K est identiquement nulle. Aucun développement limité d'ordre supérieur ni règle de calcul de développements n'est nécessaire.

8.b) Les réels x, y étant fixés et strictement positifs, $z = x/y > 0$. La question précédente donne

$$F(x, y) = y \lim_{r \rightarrow 0} S_z(r) = yz^a = y(x/y)^a = x^a y^{1-a}.$$

La fonction de Cobb-Douglas apparaît donc comme limite de la famille CES lorsque r tend vers 0.

Partie III. Estimation des paramètres

9.a) Les réels u_i , a et b sont déterministes. Comme $R_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, la transformation affine $T_i = au_i + b + R_i$ suit $\mathcal{N}(au_i + b, \sigma^2)$. Son espérance et sa variance existent, avec $E(T_i) = au_i + b$ et $V(T_i) = \sigma^2$.

9.b) Chaque T_i est une fonction affine de R_i seul. L'indépendance mutuelle des R_i et le lemme des coalitions donnent donc l'indépendance mutuelle des T_i . Ces variables n'ont pas nécessairement la même loi : leurs moyennes dépendent de u_i .

10.a) Toutes les densités sont strictement positives. En prenant le logarithme du produit,

on obtient

$$M(a, b) = -n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (t_i - au_i - b)^2.$$

C'est une fonction de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{F}$. La dérivation de cette somme finie donne

$$\nabla M(a, b) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n u_i(t_i - au_i - b) \\ \sum_{i=1}^n (t_i - au_i - b) \end{pmatrix}.$$

10.b) La condition $\nabla M = 0$ équivaut au système

$$\sum u_i t_i - a \sum u_i^2 - b \sum u_i = 0, \quad \bar{t} - a\bar{u} - b = 0.$$

La seconde équation donne $b = \bar{t} - a\bar{u}$. En remplaçant dans la première et en divisant par $n > 0$, on obtient

$$\left(\frac{1}{n} \sum u_i t_i - \bar{u} \bar{t} \right) - a \left(\frac{1}{n} \sum u_i^2 - \bar{u}^2 \right) = 0,$$

soit $\text{Cov}(u, t) - a s_u^2 = 0$. L'hypothèse $0 < \text{Cov}(u, t) < s_u^2$ assure $s_u^2 > 0$ et impose une unique solution pour a , strictement comprise entre 0 et 1. Elle détermine ensuite un unique $b \in \mathbb{R}$. Ce point appartient bien à $\mathcal{F}$: c'est l'unique point critique sur le domaine demandé.

10.c) Les expressions précédentes donnent

$$\hat{a} = \frac{\text{Cov}(u, t)}{s_u^2}, \quad \hat{b} = \bar{t} - \hat{a} \bar{u}.$$

Ces réels sont des valeurs calculées sur les observations ; les estimateurs correspondants s'obtiennent en remplaçant chaque t_i par T_i . La maximisation effective sera établie aux questions 11 et 12 ; aucune théorie générale du maximum de vraisemblance n'est requise.

11.a) Dérivons les deux composantes du gradient :

$$\partial_{11}^2 M = -\frac{1}{\sigma^2} \sum u_i^2, \quad \partial_{12}^2 M = \partial_{21}^2 M = -\frac{1}{\sigma^2} \sum u_i, \quad \partial_{22}^2 M = -\frac{n}{\sigma^2}.$$

Avec

$$n^{-1} \sum u_i^2 = s_u^2 + \bar{u}^2$$

et

$$n^{-1} \sum u_i = \bar{u},$$

on obtient

$$H = \nabla^2 M(a, b) = -\frac{n}{\sigma^2} \begin{pmatrix} s_u^2 + \bar{u}^2 & \bar{u} \\ \bar{u} & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est indépendante de (a, b) .

11.b) Question adaptée au programme actuel : le signe des valeurs propres est étudié sans déterminant.

La matrice H est symétrique réelle ; elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit λ l'une de ses valeurs propres et $Y = (h, k)^t \neq 0$ un vecteur propre associé. Un calcul de produit matriciel donne

$$\lambda(h^2 + k^2) = {}^t Y H Y = -\frac{n}{\sigma^2} [s_u^2 h^2 + (\bar{u}h + k)^2].$$

Le crochet est strictement positif : s'il était nul, $s_u^2 > 0$ imposerait $h = 0$, puis $k = 0$, contradiction. Comme $h^2 + k^2 > 0$, on en déduit $\lambda < 0$. Toutes les valeurs propres de la hessienne au point critique sont donc strictement négatives.

La fonction M est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{F}$ contenant $(\hat{a}, \hat{b})$; le critère hessien du programme donne un maximum local strict en ce point.

12. Posons $e_i = t_i - \hat{a}u_i - \hat{b}$. Les équations du point critique assurent

$$\sum e_i = 0$$

et

$$\sum u_i e_i = 0.$$

Pour tout déplacement admissible (h, k) ,

$$M(\hat{a} + h, \hat{b} + k) - M(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum [(e_i - hu_i - k)^2 - e_i^2].$$

En développant, le terme linéaire en e_i disparaît, car

$$\sum e_i(hu_i + k) = h \sum u_i e_i + k \sum e_i = 0.$$

Il reste

$$M(\hat{a} + h, \hat{b} + k) - M(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (hu_i + k)^2.$$

Comme $u_i = (u_i - \bar{u}) + \bar{u}$ et

$$\sum (u_i - \bar{u}) = 0,$$

la somme vaut $n[s_u^2 h^2 + (h\bar{u} + k)^2]$. Ainsi

$$M(\hat{a} + h, \hat{b} + k) - M(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{n}{2\sigma^2} [s_u^2 h^2 + (h\bar{u} + k)^2] < 0$$

dès que $(h, k) \neq (0, 0)$. Cette comparaison vaut pour tout autre point de $\mathcal{F}$, et non uniquement au voisinage du point critique : $(\hat{a}, \hat{b})$ est donc l'unique maximum global de M sur $\mathcal{F}$.

13.a) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La régression de u en t s'écrit $u - \bar{u} = \text{Cov}(u, t)(t - \bar{t})/s_t^2$. Pour la tracer avec u en abscisse, on isole t :

$$t = \bar{t} + \frac{s_t^2}{\text{Cov}(u, t)}(u - \bar{u}).$$

La covariance est strictement positive pour les données, donc cette division est permise. La ligne demandée est

Python

```
plt.plot(u, np.mean(t) + np.var(t) / c_ut * (u - np.mean(u)), "k-")
```

Le code complet nécessaire à la première figure est :

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

u = np.array([1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
              1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58])
t = np.array([2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
              2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34])

c_ut = np.mean((u - np.mean(u)) * (t - np.mean(t)))

plt.plot(u, t, "kD", markersize=4, linestyle="none")
plt.plot(u, c_ut / np.var(u) * u + np.mean(t)
         - c_ut / np.var(u) * np.mean(u), "k-")

plt.plot(u, np.mean(t) + np.var(t) / c_ut * (u - np.mean(u)), "k-")

plt.show()
```

Les normalisations sont toutes à diviseur 16, conformément aux définitions empiriques de l'énoncé. Les figures originales présentent un écart avec ces formules, compatible avec un mélange des diviseurs n et $n - 1$ pour variance et covariance. Les deux droites et les résidus sont ici rectifiés à partir des seize couples explicitement fournis ; les observations sont inchangées.

13.b) Les deux droites passent par le point moyen $G = (\bar{u}, \bar{t})$. Leurs équations centrées sont

$$t - \bar{t} = \frac{\text{Cov}(u, t)}{s_u^2}(u - \bar{u}), \quad t - \bar{t} = \frac{s_t^2}{\text{Cov}(u, t)}(u - \bar{u}).$$

Pour les données, leurs pentes valent respectivement environ 0,307969 et 0,323142, donc elles sont distinctes et se coupent uniquement au point moyen. Le point d'intersection donne ainsi les deux moyennes empiriques.

13.c) La lecture graphique donne $\bar{u} \approx 2,23$ et $\bar{t} \approx 2,89$; une lecture moins fine peut retenir environ 2,2 et 2,9. Les données exactes permettent de contrôler ces valeurs :

$$\bar{u} = \frac{35,72}{16} = 2,2325, \quad \bar{t} = \frac{46,17}{16} = 2,885625.$$

13.d) Le nuage s'aligne assez étroitement le long d'une droite croissante ; son coefficient de corrélation est donc proche de 1. Le calcul confirme

$$s_u^2 = 1,08523125, \quad s_t^2 = 0,107999609375, \quad \text{Cov}(u, t) = 0,3342171875,$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(u, t)}{\sqrt{s_u^2 s_t^2}} \approx 0,976240.$$

Cette corrélation décrit une liaison statistique ; elle ne prouve pas une relation causale.

13.e) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le tableau `t0` contient les prédictions $t_{0,i} = a_0 u_i + b_0$ de la régression de t en u . Le tableau `e` contient les écarts $e_i = t_{0,i} - t_i$: le signe est celui de la prédiction moins

l'observation. Le graphique représente ces écarts en fonction du numéro i de l'entreprise.

Les signes d'addition se répartissent de part et d'autre de l'axe d'ordonnée nulle ; on peut conjecturer une moyenne nulle. La démonstration exacte utilise $b_0 = \bar{t} - a_0 \bar{u}$:

$$\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} e_i = a_0 \bar{u} + b_0 - \bar{t} = 0.$$

Le code autonome complet est :

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

u = np.array([1.06, 0.44, 2.25, 3.88, 0.61, 1.97, 3.43, 2.10,
              1.50, 1.68, 2.72, 1.35, 2.94, 2.78, 3.43, 3.58])
t = np.array([2.58, 2.25, 2.90, 3.36, 2.41, 2.79, 3.32, 2.81,
              2.62, 2.70, 3.17, 2.65, 3.07, 3.13, 3.07, 3.34])

c_ut = np.mean((u - np.mean(u)) * (t - np.mean(t)))
a0 = c_ut / np.var(u)
b0 = np.mean(t) - a0 * np.mean(u)
t0 = a0 * u + b0
e = t0 - t

p = np.arange(1, 17)
plt.plot(p, e, "k+", linestyle="none")
plt.show()
```

Les calculs NumPy des deux codes ont été exécutés ; les commandes de tracé ont été relues mais non exécutées, Matplotlib n'étant pas disponible dans l'environnement. Le calcul numérique donne $a_0 \approx 0,307969$, $b_0 \approx 2,198085$ et une moyenne des résidus nulle à l'arrondi machine près. La preuve de nullité est l'identité algébrique précédente, indépendamment du tracé.

14.a) Question adaptée au programme actuel : l'hypothèse $s_u^2 > 0$ est rappelée pour

exclure un dénominateur nul. Elle impose $n \geq 2$ et des u_i non tous égaux.

Posons $c_i = u_i - \bar{u}$. Les identités déterministes utiles sont

$$\sum c_i = 0, \quad \sum c_i u_i = \sum c_i (c_i + \bar{u}) = \sum c_i^2 = n s_u^2.$$

Les T_i admettent une espérance et une variance puisqu'elles sont normales. Toute combinaison linéaire finie en admet donc aussi. Par linéarité,

$$E(A_n) = \frac{1}{n s_u^2} \sum c_i (a u_i + b) = a.$$

L'indépendance des T_i donne

$$V(A_n) = \frac{1}{n^2 (s_u^2)^2} \sum c_i^2 V(T_i) = \frac{\sigma^2 n s_u^2}{n^2 (s_u^2)^2} = \frac{\sigma^2}{n s_u^2}.$$

La variable A_n est une combinaison linéaire des normales indépendantes T_i . Les termes de coefficient nul sont constants ; les autres sont normaux, et la stabilité des sommes de normales indépendantes donne

$$A_n \sim \mathcal{N} \left(a, \frac{\sigma^2}{n s_u^2} \right).$$

Cette variance est strictement positive. La loi est exacte pour chaque plan de valeurs u_i satisfaisant $s_u^2 > 0$; il n'est pas nécessaire que les T_i aient même moyenne. La réalisation observée de A_n vaut $\text{Cov}(u, t) / s_u^2 = \hat{a}$.

14.b) La loi précédente fournit le pivot exact

$$Z = \frac{\sqrt{n s_u^2}}{\sigma} (A_n - a) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Comme $0 < \alpha < 1$, le quantile d_α existe et est strictement positif. La symétrie de la loi normale et la définition de d_α donnent

$$P(-d_\alpha \leq Z \leq d_\alpha) = \Phi(d_\alpha) - \Phi(-d_\alpha) = 1 - \alpha.$$

En isolant a dans l'événement, on obtient l'intervalle aléatoire

$$I_n = \left[A_n - d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{ns_u^2}}, A_n + d_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{ns_u^2}} \right],$$

qui vérifie $P(a \in I_n) = 1 - \alpha$. C'est un intervalle de confiance exact au niveau $1 - \alpha$.

Après observation, ses bornes sont $\hat{a} \pm d_\alpha \sigma / \sqrt{ns_u^2}$. On peut l'intersecter avec le domaine connu $]0, 1[$: comme le vrai paramètre y appartient, cette intersection conserve exactement la même probabilité de couverture.

Relevé des adaptations

- Préambules du problème et des questions 10–12 : nature ouverte des domaines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{F}$ explicitée, conformément au programme des fonctions de deux variables ; valeur de σ^2 tenue fixe pour l'étude de M .
- 6.b) et 7 : ajout local de $v''(t) < 0$ pour assurer $h'(t) < 0$ et définir le quotient $\sigma(t)$ partout. La stricte décroissance initiale de v' ne garantit que $v'' \leq 0$, ce qui ne suffit pas à cette division. La famille CES caractérisée satisfait bien cette hypothèse.
- 11.b) : étude des signes des valeurs propres de la hessienne par un vecteur propre et un produit matriciel, sans déterminant ni ancien critère d'extremum.
- 12 : déplacement $(h, k) \neq (0, 0)$ et appartenance du point déplacé à $\mathcal{F}$ explicités pour donner un sens à la comparaison globale.
- 13.a) et 13.e) : Code adapté en Python. Imports, tracés et covariance documentés ; conservation du blanc de la ligne (5) dans le sujet et complétion dans le corrigé. Toutes les variances et covariances utilisent le même diviseur n , comme dans les définitions du problème. Les seize couples numériques d'origine sont conservés.
- 13, figures : les deux figures sont retranscrites en SVG dans l'énoncé à partir des valeurs exactes des seize couples donnés dans le code. Les droites et les résidus sont recalculés selon les formules empiriques à diviseur n ; cela rectifie l'écart des

graphiques originaux avec les définitions du texte. Mêmes bornes, graduations, marqueurs et nombre de points ; aucune observation n'est ajoutée.

- 14.a) : condition $s_u^2 > 0$ rappelée explicitement, excluant $n = 1$ et les plans constants pour lesquels A_n ne serait pas défini.