



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2015

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

On note

$$s(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Cette application est linéaire et $s(v) = 1$; en particulier, $v \neq 0$.

1.a) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité de la somme des coordonnées donne

$$f(ax + by) = ax + by - (as(x) + bs(y))v = af(x) + bf(y).$$

De plus, $f(x) \in \mathbb{R}^n$. L'application f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1.b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$s(f(x)) = s(x) - s(x)s(v) = 0.$$

En appliquant à nouveau la définition de f , on obtient

$$f(f(x)) = f(x) - s(f(x))v = f(x).$$

Ainsi, $f \circ f = f$.

2. Si $x \neq 0$ vérifie $f(x) = \mu x$, alors $f(f(x)) = \mu^2 x$. La question précédente donne aussi $f(f(x)) = \mu x$, d'où $\mu(\mu - 1) = 0$. Toute valeur propre appartient donc à $\{0, 1\}$.

Ces deux valeurs sont effectivement propres : $f(v) = v - s(v)v = 0$ avec $v \neq 0$, et $f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$ avec $e_1 - e_2 \neq 0$, car $n \geq 2$.

Par conséquent, $\text{Sp}(f) = \{0, 1\}$. Aucun critère général de diagonalisation à partir d'un polynôme annulateur n'est nécessaire.

3.a) Si $y \in \text{Im } f$, il existe x tel que $y = f(x)$. Alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$.

Réciproquement, si $f(y) = y$, le vecteur y est l'image de lui-même par f , donc appartient à $\text{Im } f$.

Ainsi, $y \in \text{Im } f$ si et seulement si $f(y) = y$.

3.b) Tous les vecteurs de $\text{Im } f$ ont une somme de coordonnées nulle, d'après 1.b). Posons

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : s(y) = 0\}.$$

Si $y \in H$, alors

$$y_n = -\sum_{i=1}^{n-1} y_i,$$

donc

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i (e_i - e_n).$$

La famille $(e_1 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est libre : dans une combinaison nulle, la coordonnée d'indice $i < n$ est exactement le coefficient du i -ième vecteur. Elle est donc une base de H , et $\dim H = n - 1$.

L'inclusion $\text{Im } f \subset H$ entraîne $\dim(\text{Im } f) \leq n - 1$.

3.c) Pour $1 \leq i \leq n - 1$, $s(e_i - e_{i+1}) = 0$. Ainsi, $f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1}$. La question 3.a) donne bien $e_i - e_{i+1} \in \text{Im } f$.

3.d) Montrons que les $n - 1$ vecteurs précédents sont libres. Si

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (e_i - e_{i+1}) = 0,$$

la première coordonnée donne $a_1 = 0$. Les coordonnées suivantes donnent successivement $a_2 - a_1 = 0$, puis $a_3 - a_2 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à $a_{n-1} = 0$.

La famille libre $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est incluse dans $\text{Im } f$, donc cet espace a une dimension au moins égale à $n - 1$. Avec 3.b), on obtient

$$\dim(\text{Im } f) = \text{rg}(f) = n - 1.$$

La famille proposée est une base de $\text{Im } f$, et $\text{Im } f = H$.

4.a) L'équation $f(x) = 0$ s'écrit $x = s(x)v$. Tout vecteur du noyau est donc un multiple de v . Réciproquement, la linéarité et $f(v) = 0$ montrent que tout multiple de v appartient au noyau.

Ainsi, $\text{Ker } f = \text{Vect}(v)$; comme $v \neq 0$, la famille (v) en est une base.

4.b) Le sous-espace propre pour 0 est le noyau :

$$E_0(f) = \text{Vect}(v).$$

La question 3.a) donne celui associé à 1 :

$$E_1(f) = \text{Im } f = H = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}.$$

Ses bases explicites ont été obtenues en 3.b) et 3.d).

4.c) Considérons la famille

$$\mathcal{C} = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, v).$$

Dans une combinaison nulle de ces vecteurs, la somme des coordonnées est le coefficient de v , puisque les autres vecteurs ont une somme de coordonnées nulle et $s(v) = 1$. Ce coefficient vaut donc 0. La liberté établie en 3.d) donne alors la nullité de tous les autres coefficients.

La famille $\mathcal{C}$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, donc une base. Tous ses vecteurs sont propres pour f . Ainsi, f est diagonalisable.

5. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_j) = e_j - v$. La colonne d'indice j de M est donc celle de $e_j - v$, et

$$M_{ij} = \delta_{ij} - v_i,$$

où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Explicitement,

$$M = \begin{pmatrix} 1 - v_1 & -v_1 & \cdots & -v_1 \\ -v_2 & 1 - v_2 & \cdots & -v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & -v_n & \cdots & 1 - v_n \end{pmatrix}.$$

Dans la base $\mathcal{C}$ de 4.c), les $n - 1$ premiers vecteurs sont associés à 1 et le dernier à 0. Par conséquent,

$$M' = \text{diag}(1, \dots, 1, 0).$$

Si P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{C}$ écrits dans la base canonique, sa famille de colonnes est une base, donc P est inversible et $M' = P^{-1}MP$.

Problème

Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$

1. Les résultats sur la loi exponentielle, avec $\lambda > 0$, donnent

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2. Question adaptée au programme actuel : les notions de biais et de convergence ont été définies dans le préambule ; les résultats particuliers se démontrent directement.

Les variables X_i ont toutes une espérance et une variance finies. Par linéarité de l'espérance et par indépendance pour le calcul de la variance,

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

L'estimateur est donc sans biais. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\lambda^2\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi, $\bar{X}_n$ est également convergent pour $\frac{1}{\lambda}$.

3.a) Pour $x \leq 0$, $P(M_n \leq x) = 0$, puisque les X_i sont strictement positives. Pour $x > 0$,

$$\{M_n \leq x\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\}.$$

L'indépendance donne

$$F_{M_n}(x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})^n.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 0, et de classe C^1 sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Sa dérivée sur ce dernier intervalle est $n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$. On obtient donc exactement la densité proposée. Ses limites latérales en 0 sont finies : à droite, elle vaut λ si $n = 1$, et 0 si $n \geq 2$.

3.b) Méthode 1 — Comparaison de l'intégrale d'espérance

Pour $x > 0$, $0 \leq (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \leq 1$. Ainsi,

$$0 \leq x f_{M_n}(x) \leq n\lambda x e^{-\lambda x}.$$

L'intégrale du majorant sur $]0, +\infty[$ vaut $nE(X) = n/\lambda < +\infty$. L'intégrale définissant $E(M_n)$ est donc absolument convergente. On a notamment $0 < E(M_n) \leq n/\lambda$.

Méthode 2 — Encadrement des variables positives

Pour toute réalisation, $0 < M_n \leq X_1 + \dots + X_n = Y_n$. La variable Y_n est intégrable, puisque les X_i le sont et que la somme est finie. La comparaison des espérances de variables positives donne alors $E(M_n) \leq E(Y_n) = n/\lambda < +\infty$.

La première méthode utilise directement la densité obtenue en 3.a) ; la seconde permet d'établir l'intégrabilité d'un maximum sans calculer sa loi.

3.c) Sur $[0, a]$, l'application $x \mapsto z = 1 - e^{-\lambda x}$ est de classe C^1 , strictement croissante et de dérivée strictement positive. Ses bornes images sont 0 et $1 - e^{-\lambda a}$; de plus,

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z), \quad dz = \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Par changement de variable sur ce segment,

$$\int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx = -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1} \ln(1 - z) dz.$$

3.d) Question adaptée au programme actuel : le sens de l'intégrale à borne singulière a été précisé dans l'énoncé.

La question 3.b) assure que

$$E(M_n) = \lim_{a \rightarrow +\infty} n\lambda \int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$$

est fini. Lorsque $a \rightarrow +\infty$, la borne $1 - e^{-\lambda a}$ tend vers 1 par valeurs inférieures. Elle parcourt tout $[0, 1[$ lorsque a parcourt $[0, +\infty[$. L'égalité de 3.c) prouve donc la convergence de l'intégrale impropre à droite et donne

$$E(M_n) = -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z) dz.$$

3.e) Question adaptée au programme actuel : l'intégration par parties est effectuée sur segment avant passage à la limite.

Posons $H(z) = (1-z)(1-\ln(1-z))$ pour $0 \leq z < 1$. La dérivation donne

$$H'(z) = -(1-\ln(1-z)) + 1 = \ln(1-z).$$

En outre, $H(z) \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow 1^-$, car $w \ln w \rightarrow 0$ lorsque $w \rightarrow 0^+$.

Notons $I_n = \int_0^1 z^{n-1} \ln(1-z) dz$, dont l'existence a été établie. Pour $0 < b < 1$, une intégration par parties donne

$$\int_0^b z^n \ln(1-z) dz = b^n H(b) - n \int_0^b z^{n-1} (1-z)(1-\ln(1-z)) dz.$$

Le terme de bord en 0 est nul puisque $n \geq 1$. Le terme de bord en b tend vers 0. Les intégrales de logarithmes qui interviennent ensuite convergent d'après 3.d), et les intégrales polynomiales sont ordinaires. On peut donc passer à la limite et séparer ces intégrales :

$$I_{n+1} = -n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + n(I_n - I_{n+1}).$$

Ainsi,

$$(n+1)I_{n+1} = nI_n - \frac{1}{n+1}.$$

En multipliant par $-1/\lambda$ et en utilisant 3.d), on obtient la relation cherchée :

$$E(M_{n+1}) = E(M_n) + \frac{1}{\lambda(n+1)}.$$

3.f) On a $M_1 = X_1$, donc $E(M_1) = 1/\lambda = u_1/\lambda$. Si $E(M_n) = u_n/\lambda$, alors

$$E(M_{n+1}) = \frac{u_n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(n+1)} = \frac{u_{n+1}}{\lambda}.$$

Par récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$E(M_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \frac{u_n}{\lambda}.$$

4. Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans le sujet original : pour tout $n \geq 1$,

$$V(M_n) = \frac{v_n}{\lambda^2}, \quad v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}.$$

Cette formule sera utilisée pour calculer la variance de M'_n puis établir sa convergence.

- 4.a) Comme $u_n > 0$ est déterministe, les règles d'espérance et de variance donnent

$$E(M'_n) = \frac{E(M_n)}{u_n} = \frac{1}{\lambda}, \quad V(M'_n) = \frac{V(M_n)}{u_n^2} = \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2}.$$

- 4.b) Rectification locale de l'énoncé : le PDF demande la convergence de « la série de terme général v_n ». Cette série diverge puisque $v_n \geq 1$. La question rectifiée porte sur la convergence de la suite (v_n) , nécessaire à 4.c).

Méthode 1 — Séries usuelles et comparaison intégrale

La série de Riemann

$$\sum_{j \geq 1} 1/j^2$$

converge, puisque son exposant est $2 > 1$. La suite de ses sommes partielles (v_n) converge donc vers un réel fini $v \geq 1$.

Pour $j \geq 1$ et $t \in [j, j+1]$, on a $1/t \leq 1/j$. En intégrant puis en sommant,

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = u_n.$$

Comme $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$, on obtient $u_n \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 — Majorations et regroupements élémentaires

Pour $j \geq 2$, $1/j^2 \leq 1/(j(j-1)) = 1/(j-1) - 1/j$. Par télescopage,

$$v_n \leq 1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

La suite (v_n) est croissante, car $v_{n+1} - v_n = 1/(n+1)^2 > 0$, et majorée ; elle converge.

Pour chaque entier $k \geq 0$, le bloc d'indices $2^k < j \leq 2^{k+1}$ contient 2^k termes, tous au moins égaux à $1/2^{k+1}$. Sa somme est donc au moins $1/2$. Il s'ensuit que $u_{2^m} \geq 1 + m/2$, puis, par croissance de (u_n) , que $u_n \rightarrow +\infty$.

La première approche mobilise une série du programme et une intégrale ; la seconde établit les deux conclusions à partir de sommes finies seulement.

4.c) Question adaptée au programme actuel : la convergence est vérifiée à partir de la définition fournie.

La question 4.a) donne le caractère sans biais. Puisque (v_n) converge et que $u_n \rightarrow +\infty$, on a $V(M'_n) \rightarrow 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P \left(\left| M'_n - \frac{1}{\lambda} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2 \varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi, M'_n est un estimateur sans biais et convergent de $1/\lambda$.

4.d) Méthode 1 — Minimum du polynôme imposé

En développant la somme finie,

$$Q(x) = nx^2 - 2u_n x + v_n.$$

Sa dérivée $Q'(x) = 2nx - 2u_n$ s'annule uniquement en $x = u_n/n$, et $Q''(x) = 2n > 0$. Le minimum global de Q vaut donc

$$Q\left(\frac{u_n}{n}\right) = v_n - \frac{u_n^2}{n}.$$

Or Q est une somme de carrés, donc est positive ou nulle en tout point. Ainsi, $u_n^2 \leq nv_n$.

Méthode 2 — Variance d'une variable uniforme discrète

Soit J uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ et $W = 1/J$. Cette variable à support fini a pour espérance u_n/n et pour moment d'ordre deux v_n/n . La positivité de sa variance donne

$$0 \leq V(W) = \frac{v_n}{n} - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2,$$

d'où à nouveau $u_n^2 \leq nv_n$.

La première méthode répond à l'outil imposé ; la seconde relie l'inégalité à une dispersion de données finies. Pour $n \geq 2$, les nombres $1, 1/2, \dots, 1/n$ ne sont pas tous égaux, donc la variance de W est strictement positive et l'inégalité est stricte. Pour $n = 1$, il y a égalité.

4.e) Puisque $u_n > 0$, l'inégalité précédente entraîne

$$V(M'_n) = \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2} \geq \frac{1}{n\lambda^2} = V(\bar{X}_n).$$

Il y a égalité pour $n = 1$ et inégalité stricte pour $n \geq 2$. Les deux estimateurs sont sans biais et convergents ; à taille d'échantillon fixée au moins égale à 2, la moyenne empirique présente la variance la plus faible et est donc préférable selon ce critère de comparaison.

Partie II. Un exemple

5.a) Le réel $1/\lambda = E(X)$ est la durée de vie moyenne d'un composant, ou la durée moyenne entre deux pannes successives. Il s'exprime en heures; λ s'exprime donc en inverse d'heure.

5.b) Pour $h \leq 0$, $P(X > h) = 1$, ce qui ne peut être égal à $p \in]0, 1[$. Pour $h > 0$, $P(X > h) = e^{-\lambda h}$. Cette fonction est continue, strictement décroissante de 1 vers 0, et

$$e^{-\lambda h_p} = p \iff h_p = -\frac{\ln p}{\lambda}.$$

Ce réel est strictement positif et constitue l'unique solution cherchée.

5.c) Question adaptée au programme actuel : on utilise la définition de convergence et une majoration explicite.

Le nombre $c = -\ln p$ est connu et strictement positif. Posons $H_n = c\bar{X}_n$. Alors

$$E(H_n) = \frac{c}{\lambda} = h_p, \quad V(H_n) = \frac{c^2}{n\lambda^2}.$$

Cet estimateur, calculable sans connaître λ , est sans biais. Pour tout $\varepsilon > 0$, Bienaymé-Tchebychev donne

$$P(|H_n - h_p| \geq \varepsilon) \leq \frac{c^2}{n\lambda^2\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Il est donc convergent pour h_p .

5.d) La moyenne observée est $\bar{x} = 10^5/100 = 1000$ heures. Pour $p = 1/2$, $-\ln p = \ln 2$. L'estimation issue de H_{100} est donc

$$\hat{h}_{1/2} = (\ln 2)\bar{x} \simeq 0,7 \times 1000 = 700 \text{ heures.}$$

L'estimateur H_{100} est une variable aléatoire; 700 heures est l'estimation obtenue avec les observations données.

6. Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans le sujet original : pour $n \geq 1$,

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilisera uniquement cette formule particulière sur les sommes de durées de vie ; aucune formule générale de convolution n'est nécessaire.

6.a) Posons $Y_0 = 0$. La k -ième panne se produit au temps Y_k ; les durées sont strictement positives, donc les temps successifs sont strictement croissants. Pour $k \geq 1$,

$$\{N(t) = k\} = \{Y_k < t \leq Y_{k+1}\}.$$

Les fonctions de répartition admises sont continues : chaque Y_j est sans atome. Comme $\{Y_{k+1} < t\} \subset \{Y_k < t\}$, on a

$$P(N(t) = k) = F_{Y_k}(t) - F_{Y_{k+1}}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Pour $k = 0$, l'absence de panne signifie $X_1 \geq t$, et

$$P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Les probabilités ainsi calculées ont pour somme

$$e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda t)^k / k! = 1.$$

L'éventualité d'une infinité de pannes avant t a donc une probabilité nulle. Finalement,

$N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt .

6.b) Cette loi a pour espérance λt . La moyenne observée $\bar{x} > 0$ estime la durée moyenne $1/\lambda$; il est donc naturel de remplacer λ par $1/\bar{x}$. Le nombre moyen de pannes estimé sur la durée t est

$$E(\widehat{N(t)}) = \frac{t}{\bar{x}}.$$

Avec les données de 5.d), cela donne $t/1000$ si t est exprimé en heures. Cette valeur estime un nombre moyen, et ne prédit pas exactement la réalisation aléatoire entière de $N(t)$.

7. On construit un intervalle de confiance asymptotique pour $1/\lambda$, au niveau $1 - \alpha$, avec $0 < \alpha < 1$.

7.a) La loi normale centrée réduite est symétrique : pour tout réel u , $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$. Ainsi,

$$\Phi(-t_1) = 1 - \Phi(t_1) = \frac{\alpha}{2} = \Phi(t_2).$$

La fonction Φ étant strictement croissante, elle est injective ; par conséquent, $t_2 = -t_1$. De plus, $1 - \alpha/2 > 1/2 = \Phi(0)$, donc $t_1 > 0$.

7.b) Les variables X_i sont indépendantes et de même loi, d'espérance $m = 1/\lambda$ et de variance $\sigma^2 = 1/\lambda^2 > 0$. Le théorème limite central s'applique et donne

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} = \sqrt{n}(\lambda \bar{X}_n - 1) = R_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

7.c) La loi limite est continue aux deux bornes $-t_1$ et t_1 . La conséquence du théorème limite central sur les probabilités d'intervalles donne donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-t_1 \leq R_n \leq t_1) = \Phi(t_1) - \Phi(-t_1) = 1 - \alpha.$$

7.d) Question adaptée au programme actuel : la notion d'intervalle asymptotique est définie dans le sujet, et le cas d'une borne supérieure non finie est explicité. On conserve le pivot particulier de la question 7.b).

Posons $\theta = 1/\lambda > 0$ et $c_n = t_1/\sqrt{n} > 0$. Puisque $\bar{X}_n > 0$,

$$-t_1 \leq R_n \leq t_1 \iff 1 - c_n \leq \frac{\bar{X}_n}{\theta} \leq 1 + c_n.$$

Si $n > t_1^2$, on a $0 < c_n < 1$. Les quantités divisées sont positives et les deux inégalités équivalent à

$$\frac{\bar{X}_n}{1 + c_n} \leq \theta \leq \frac{\bar{X}_n}{1 - c_n}.$$

On prend donc

$$I_n = \left[\frac{\bar{X}_n}{1 + t_1/\sqrt{n}}; \frac{\bar{X}_n}{1 - t_1/\sqrt{n}} \right].$$

Si $n \leq t_1^2$, alors $1 - c_n \leq 0$. L'inégalité de gauche est toujours vraie, puisque $\bar{X}_n/\theta > 0$. Il reste seulement $\theta \geq \bar{X}_n/(1 + c_n)$; on peut alors poser

$$I_n = \left[\frac{\bar{X}_n}{1 + t_1/\sqrt{n}}; +\infty \right].$$

Dans les deux cas, les événements $\{\theta \in I_n\}$ et $\{-t_1 \leq R_n \leq t_1\}$ sont égaux. Les bornes sont calculables à partir de l'échantillon et de α ; elles ne contiennent pas le paramètre inconnu. La question 7.c) prouve $P(\theta \in I_n) \rightarrow 1 - \alpha$.

7.e) Pour une taille n et une moyenne observée $\bar{x}$ fixées, lorsque α diminue vers 0, le niveau de confiance $1 - \alpha$ augmente vers 1 et t_1 augmente vers $+\infty$. La borne inférieure diminue; tant que $t_1 < \sqrt{n}$, la borne supérieure augmente. À partir de $t_1 \geq \sqrt{n}$, la borne supérieure devient infinie, conformément à 7.d). Dans la limite, l'intervalle couvre tout le domaine positif du paramètre.

Lorsque α augmente vers 1, t_1 diminue vers 0; les deux bornes tendent vers $\bar{x}$. L'intervalle se resserre, mais son niveau de confiance tend vers 0. Un niveau de confiance plus élevé s'accompagne ainsi d'une moindre précision.

7.f) On utilise $n = 100$, $\bar{x} = 1000$ et l'approximation fournie $t_1 \simeq 2$. On a $t_1/\sqrt{n} \simeq 0,2 < 1$, d'où

$$I_{100}^{\text{obs}} \simeq \left[\frac{1000}{1,2}; \frac{1000}{0,8} \right] = \left[\frac{2500}{3}; 1250 \right].$$

La première borne vaut environ 833,333 heures. Après arrondi, on retrouve [833; 1250] heures. Le niveau 0,95 est asymptotique et le quantile a lui-même été approché : il ne s'agit pas d'une garantie exacte pour cet échantillon fini.

Partie III. Un résultat asymptotique

8.a) Pour tout réel x ,

$$\{T_n \leq x\} = \left\{ M_n \leq x + \frac{1}{\lambda} \ln n \right\}.$$

La formule de répartition du maximum, établie en 3.a) et valable pour tout seuil réel, donne

$$F_{T_n}(x) = \left(F_X \left(x + \frac{1}{\lambda} \ln n \right) \right)^n.$$

8.b) L'inégalité demandée équivaut à $\ln n > -\lambda x$, soit $n > e^{-\lambda x}$. On peut choisir

$$N_x = \lfloor e^{-\lambda x} \rfloor + 1.$$

Ce nombre est un entier au moins égal à 1 et strictement supérieur à $e^{-\lambda x}$. Pour tout $n \geq N_x$, le seuil est positif, donc

$$F_X \left(x + \frac{1}{\lambda} \ln n \right) = 1 - \exp(-\lambda x - \ln n) = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}.$$

8.c) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $a = e^{-\lambda x} > 0$. Pour $n \geq N_x$, $F_{T_n}(x) = (1 - a/n)^n$ et la base est strictement positive.

Le développement limité usuel à l'ordre 1, $\ln(1 + h) = h + o(h)$ en 0, donne

$$n \ln \left(1 - \frac{a}{n} \right) = -a + o(1) \rightarrow -a.$$

Par continuité de l'exponentielle, il en résulte

$$F_{T_n}(x) = \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{a}{n} \right) \right) \rightarrow e^{-a} = \exp(-e^{-\lambda x}).$$

Le passage à l'exponentielle porte ici sur une limite réelle finie explicitement calculée ; il ne repose pas sur une composition non justifiée d'équivalents.

9. On étudie $F(x) = \exp(-e^{-\lambda x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

9.a) Les fonctions exponentielles et les applications affines sont de classe C^∞ ; par composition, F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout x ,

$$F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \exp(-e^{-\lambda x}) > 0.$$

La fonction F est strictement croissante. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $e^{-\lambda x} \rightarrow +\infty$ et $F(x) \rightarrow 0$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $e^{-\lambda x} \rightarrow 0$ et $F(x) \rightarrow 1$.

Le théorème de la bijection pour une fonction continue strictement croissante donne donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

9.b) La fonction F est croissante, continue sur $\mathbb{R}$, de limites 0 et 1 respectivement en $-\infty$ et $+\infty$; elle est donc une fonction de répartition. Elle est même de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}$.

La variable associée admet la densité continue

$$f_T(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \exp(-e^{-\lambda x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est positive et, par le théorème fondamental de l'intégration sur segments suivi des limites de F ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Toutes ses limites latérales en un point réel sont finies, par continuité. Le nom « loi de Gumbel » désigne ici uniquement la loi qui vient d'être définie et étudiée.

9.c) La question 8.c) établit, pour tout réel x , $F_{T_n}(x) \rightarrow F(x) = F_T(x)$. La fonction F_T étant continue partout, la définition de la convergence en loi donne

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} T.$$

10.a) Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine utilisable a été indiqué dans l'énoncé.

Méthode 1 — Changement de variable et comparaison des intégrales

Sur tout segment $[A, B]$, l'application $t = e^{-\lambda x}$ est de classe C^1 , strictement décroissante, et sa dérivée ne s'annule pas. Puisque $x = -(\ln t)/\lambda$ et $dt = -\lambda e^{-\lambda x} dx$, on a

$$\int_A^B |x| f_T(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{e^{-\lambda B}}^{e^{-\lambda A}} |\ln t| e^{-t} dt.$$

Sur $]0, 1]$, $0 \leq |\ln t| e^{-t} \leq -\ln t$. Une primitive de $-\ln t$ est $t(1 - \ln t)$, de limite nulle en 0^+ ; par conséquent, $\int_0^1 -\ln t dt = 1$.

Sur $[1, +\infty[$, $0 \leq \ln t \leq t$, donc $0 \leq |\ln t| e^{-t} \leq t e^{-t}$. L'intégrale de ce dernier majorant converge, par exemple en utilisant la primitive $-(t+1)e^{-t}$.

Les comparaisons prouvent la convergence de $\int_0^{+\infty} |\ln t| e^{-t} dt$. En faisant tendre les bornes des segments vers les extrémités correspondantes, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_T(x) dx < +\infty. \text{ L'espérance } E(T) \text{ existe.}$$

Méthode 2 — Majorations directes des deux queues

Pour $x \geq 0$, $f_T(x) \leq \lambda e^{-\lambda x}$, donc $xf_T(x)$ est majorée par une fonction intégrable.

Pour $x \leq 0$, posons $u = e^{-\lambda x} \geq 1$. La série exponentielle à termes positifs donne $e^u \geq u^3/6$, donc $e^{-u} \leq 6/u^3$. Ainsi,

$$f_T(x) = \lambda u e^{-u} \leq 6\lambda u^{-2} = 6\lambda e^{2\lambda x}.$$

La fonction $|x|e^{2\lambda x}$ est intégrable sur $] -\infty, 0]$, par le changement affine $y = -x$ puis une intégration par parties. Cette seconde majoration prouve aussi l'intégrabilité absolue.

Le changement de variable décrit exactement l'intégrale à étudier ; les majorations directes mettent en évidence la décroissance des deux queues de la densité.

10.b) La variable X est strictement positive, donc Z est bien définie. Pour tout réel z , la fonction logarithme étant strictement croissante et $\lambda > 0$,

$$Z \leq z \iff X \geq \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda}.$$

Ce seuil est strictement positif. La loi exponentielle étant continue,

$$F_Z(z) = P\left(X \geq \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda}\right) = \exp(-e^{-\lambda z}) = F_T(z).$$

Les fonctions de répartition coïncident sur $\mathbb{R}$; Z et T sont donc de même loi.

10.c) Question adaptée au programme actuel : un contrôle élémentaire de la singularité en 0 a été fourni.

D'après 10.a) et 10.b), Z admet une espérance et $E(Z) = E(T)$. Le théorème de transfert, dont l'intégrabilité absolue est ainsi assurée, donne

$$E(T) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \ln(\lambda x) \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Le changement de variable affine $t = \lambda x$, d'abord sur $[a, b]$ avec $0 < a < b$, puis par passage aux limites, donne

$$E(T) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

La convergence absolue de l'intégrale de droite peut également se vérifier directement : sur $]0, 1]$, son intégrande en valeur absolue est majoré par $-\ln t$, et sur $[1, +\infty[$, par te^{-t} . Les deux majorants sont intégrables, comme établi en 10.a).

10.d) La concavité de $\ln$ sur $]0, +\infty[$ signifie que sa courbe est en dessous de chacune de ses tangentes. Sa tangente en 1 donne $\ln t \leq t - 1$ pour tout $t > 0$.

Les intégrales en jeu étant absolument convergentes,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt \leq \int_0^{+\infty} (t - 1)e^{-t} \, dt = 1 - 1 = 0.$$

La formule 10.c), avec $\lambda > 0$, entraîne donc $E(T) \geq 0$. En fait, l'inégalité tangentielle est stricte pour $t \neq 1$, ce qui donne même $E(T) > 0$.

11. Dans cette question, $\lambda = 1$.

11.a) Ici, $F(x) = \exp(-e^{-x})$. Pour $u \in]0, 1[$,

$$u = F(x) \iff \ln u = -e^{-x} \iff x = -\ln(-\ln u).$$

La bijection réciproque est donc

$$G :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad G(u) = -\ln(-\ln u).$$

11.b) Code adapté en Python. Le programme complet est :

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-2, 2, 400)
y = np.exp(-np.exp(-x))

plt.plot(x, y)
plt.plot(y, x)
plt.show()
```

Il calcule les valeurs de F aux 400 abscisses du tableau x , puis superpose deux courbes polygonales. Les précisions sur ces courbes sont données dans les deux sous-questions suivantes.

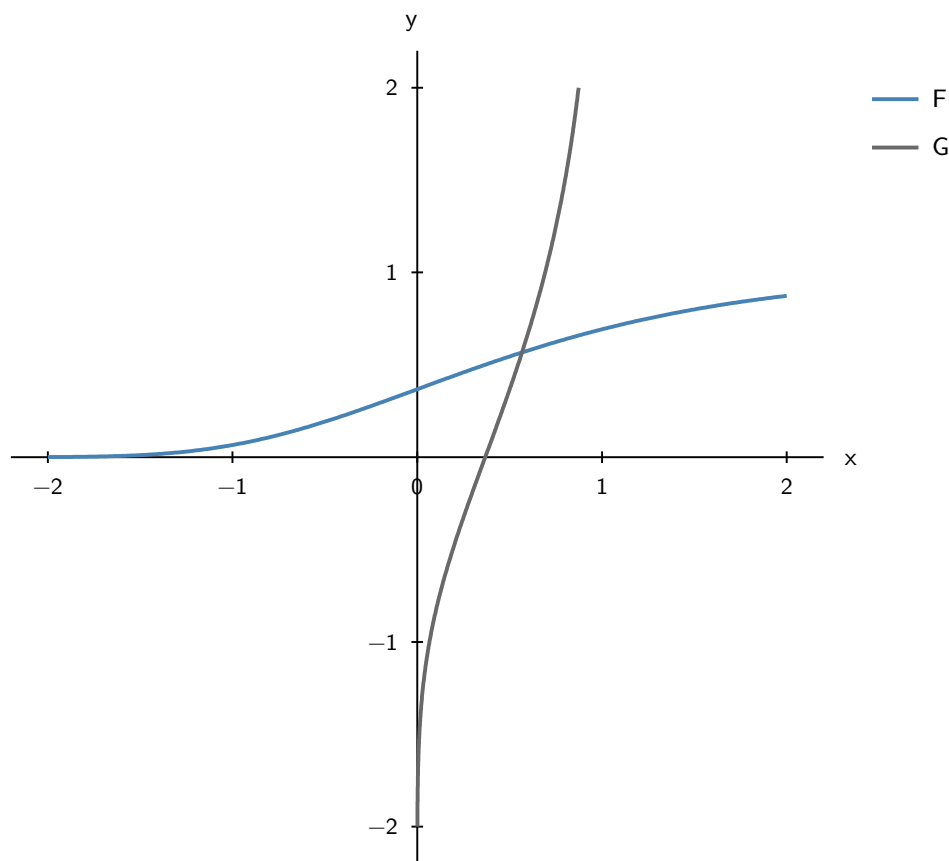
11.b)(i) Les éléments de x , indexés de $k = 0$ à $k = 399$, sont

$$x_k = -2 + \frac{4k}{399}.$$

L'égalité $x_k = 0$ imposerait $k = 399/2 = 199,5$, qui n'est pas un entier. Le nombre 0 ne figure donc pas dans le tableau. Les valeurs qui l'encadrent sont $x_{199} = -2/399$ et $x_{200} = 2/399$.

11.b)(ii) Le premier tracé relie les points $(x_k, F(x_k))$ et représente la restriction de F à $[-2, 2]$, à la précision du maillage. Le second relie $(F(x_k), x_k)$: il représente la restriction de G à $[F(-2), F(2)]$.

Ces deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les bornes du second domaine sont $F(-2) = e^{-e^2} \simeq 0,000618$ et $F(2) = e^{-e^{-2}} \simeq 0,873423$; le programme ne trace donc pas G sur tout $]0, 1[$.



Tracés du programme à 400 points

11.c) La fonction G , réciproque d'une bijection strictement croissante, est strictement croissante. Pour tout réel x ,

$$G(U) \leq x \iff U \leq F(x).$$

Comme $F(x) \in]0, 1[$ et U est uniforme sur $]0, 1[$,

$$P(G(U) \leq x) = F(x).$$

Ainsi, $G(U)$ a la même loi que T , c'est-à-dire la loi de Gumbel de paramètre 1 définie dans le problème.

11.d) Méthode 1 — Séparation de l'intégrale

La formule 10.c) pour $\lambda = 1$ donne

$$E(T) = \int_0^1 e^{-t}(-\ln t) dt - \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

Le second terme soustrait est positif ou nul, tandis que $e^{-t} \leq 1$ et $-\ln t \geq 0$ sur $]0, 1]$. Il en résulte

$$E(T) \leq \int_0^1 -\ln t \, dt = 1.$$

Méthode 2 — Comparaison à partir d'une uniforme

Pour $0 < u < 1$, l'inégalité tangentielle $\ln u \leq u - 1$ donne $-\ln u \geq 1 - u > 0$. Par croissance du logarithme puis changement de signe,

$$G(u) = -\ln(-\ln u) \leq -\ln(1 - u).$$

La variable $G(U)$ est intégrable d'après 10.a) et 11.c). Par transfert,

$$E(-\ln(1 - U)) = \int_0^1 -\ln(1 - u) \, du = 1,$$

où le changement affine $t = 1 - u$ ramène à l'intégrale de la première méthode. La comparaison des espérances donne à nouveau $E(T) = E(G(U)) \leq 1$.

La première preuve agit sur la formule intégrale de l'espérance ; la seconde montre une majoration des variables simulées elles-mêmes.

11.e) Code adapté en Python.

Méthode 1 — Inversion de la fonction de répartition

La question 11.c) permet d'appliquer G à une uniforme. Le code suivant traite aussi le cas numérique exceptionnel où le générateur renverrait exactement 0, valeur pour laquelle le logarithme n'est pas défini.

Python

```
import numpy as np

def simuler_T():
    u = np.random.random()
    while u == 0.0:
        u = np.random.random()
    return -np.log(-np.log(u))

t_simule = simuler_T()
print(t_simule)
```

La boucle retire uniquement une éventuelle valeur nulle ; le générateur ne renvoie pas 1. La valeur `t_simule` est donc toujours calculée avec des logarithmes définis.

Méthode 2 — Transformation d'une exponentielle

La question 10.b), pour $\lambda = 1$, donne aussi T de même loi que $-\ln X$ avec X exponentielle de moyenne 1.

Python

```
import numpy as np

def simuler_T_exponentielle():
    x = np.random.exponential(scale=1.0)
    while x == 0.0:
        x = np.random.exponential(scale=1.0)
    return -np.log(x)

t_simule = simuler_T_exponentielle()
print(t_simule)
```

Le paramètre `scale=1.0` est la moyenne de l'exponentielle utilisée. Les deux méthodes

donnent la même loi théorique ; la première part d'une uniforme, la seconde d'une exponentielle.

11.f) Code adapté en Python. On simule N valeurs indépendantes de T et on calcule leur moyenne.

Pour justifier cette approximation avec la loi faible des grands nombres, vérifions que T admet aussi une variance finie. Les majorations directes de 10.a), avec $\lambda = 1$, donnent

$$x^2 f_T(x) \leq x^2 e^{-x} \quad (x \geq 0), \quad x^2 f_T(x) \leq 6x^2 e^{2x} \quad (x \leq 0).$$

Les deux majorants sont intégrables sur leurs demi-droites, par deux intégrations par parties sur segments suivies des limites exponentielles. Ainsi, $E(T^2) < +\infty$, donc $V(T) < +\infty$.

Pour une suite indépendante $(T^{(j)})$ de même loi que T , la moyenne

$$A_N = N^{-1} \sum_{j=1}^N T^{(j)}$$

vérifie $E(A_N) = E(T)$ et $V(A_N) = V(T)/N$. Pour tout $\varepsilon > 0$, Bienaymé-Tchebychev donne

$$P(|A_N - E(T)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T)}{N\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Un programme complet est :

Python

```
import numpy as np

def simuler_T():
    u = np.random.random()
    while u == 0.0:
        u = np.random.random()
    return -np.log(-np.log(u))
```

```
N = 100000  
somme = 0.0  
for j in range(N):  
    somme = somme + simuler_T()  
moyenne = somme / N  
print(moyenne)
```

La variable `somme` cumule les tirages, puis `moyenne` est leur moyenne empirique. Elle fournit une approximation aléatoire de $E(T)$, généralement voisine de 0,58 pour ce nombre de tirages. Une simulation illustre l'approximation ; elle ne démontre pas une valeur exacte de l'espérance.

Relevé des adaptations

- Problème 2, 4.c), 5.c) et préambule : définitions du caractère sans biais et de la convergence ajoutées ; les propriétés particulières sont établies avec espérances, variances et Bienaymé-Tchebychev, sans théorie générale supplémentaire de l'estimation.
- Problème 3.d) et 3.e) : définition par limite de l'intégrale à borne 1 et consigne de travailler d'abord sur segment pour l'intégration par parties ; les questions et résultats demandés sont conservés.
- Problème 4.b) : « convergence de la série de terme général v_n » rectifiée en « convergence de la suite (v_n) ». La première assertion serait fausse puisque $v_n \geq 1$; la seconde est le résultat nécessaire à 4.c).
- Problème 7 et 7.d) : définition de l'intervalle de confiance asymptotique et précision du cas $n \leq t_1^2$; l'intervalle est déduit par inversion du pivot particulier de 7.b), sans théorème général supplémentaire. En 7.f), le caractère arrondi des bornes numériques est précisé.

- Problème 10.a) et 10.c) : changement de variable non affine indiqué et guidage de l'intégrabilité en 0 par une primitive de $\ln$; aucune démonstration demandée n'est supprimée.
- Problème 11.b), 11.e) et 11.f) : Code adapté en Python, avec documentation utile, imports explicites, conservation des 400 points du tracé et traitement d'une éventuelle valeur pseudo-aléatoire nulle avant logarithme. Le corrigé de 11.b) (ii) contient un SVG calculé à partir des fonctions données ; aucune figure n'était fournie dans le sujet original.