



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$, on pose :

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^3 a_{1,j}, \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^3 a_{2,j}, \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^3 a_{3,j}$$

(sommes des coefficients des lignes),

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,1}, \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,2}, \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,3}$$

(sommes des coefficients des colonnes),

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,i}, \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,4-i}$$

(sommes des coefficients des diagonales).

Pour tout couple $(k, \ell) \in \{1, 2, 3\}^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la k -ième ligne et de la ℓ -ième colonne, qui vaut 1.

La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notée $\mathcal{B}$.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

1.a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.b) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit f l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui, à toute matrice A ,

associe le vecteur :

$$f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A)).$$

2.a) Montrer que f est une application linéaire.

2.b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A).$$

3.a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3.b) On note $\text{Ker } f$ le noyau de f . Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \text{Ker } f$.

3.c) On note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\text{Ker } f$ et d'une matrice de $\text{Vect}(J)$.

3.d) Quel est le rang de l'application f ?

3.e) Déterminer la dimension de $\text{Ker } f$ ainsi qu'une base de $\text{Ker } f$.

Problème

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée Φ . La notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle. Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x) \ln(1-x).$$

1.a) Montrer que N est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

1.b) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.

1.c) On note N' la dérivée de N . Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $N'(x) \leq 0$.

1.d) En déduire un encadrement de $N(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}.$$

2.a) Rappeler le développement limité de $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 2. On pourra appliquer directement la formule de Taylor-Young à la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.

2.b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi prolongée.

2.c) Sous réserve d'existence, on note f' la dérivée de f . Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f'(x) = -2 \frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

2.d) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, 1[$. En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1[$, on pose :

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right).$$

3.a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x) dx$. Pour étudier la borne 1, réécrire g_n à l'aide de l'expression de f , puis rechercher sa limite et un prolongement continu en 1. On pose alors :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx.$$

3.b) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

3.c) En déduire l'encadrement :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right).$$

3.d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1/\ln(n+2)$.

4.a) Montrer que $0 < v_n < 1$.

4.b) On pose $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de $(w_n)_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite.

4.c) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités suivantes :

$$I_n \geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right) dx \geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

4.d) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1.$$

4.e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la partie I.

5. Pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_0(x) = 1 - e^{-x}, \quad J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

5.a) Calculer $J_1(x)$ pour tout $x > 0$.

5.b) Établir, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

5.c) En déduire, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

5.d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et calculer sa valeur.

5.e) À l'aide du changement de variable $t = n(1 - x)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n).$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, de même loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

6.a) Rappeler sans démonstration, mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de S_n .

6.b) Exprimer $P(S_n \leq n)$ et $P(S_n \geq n)$ en fonction de $J_n(n)$ et de $J_{n-1}(n)$, respectivement.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h_n(x) = x^n e^{-x}$.

7.a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

7.b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(S_{n+1} \leq n+1) - P(S_n \leq n) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt.$$

7.c) En déduire que la suite $(P(S_n \leq n))_{n \geq 1}$ est décroissante.

7.d) Étudier la monotonie de la suite $(P(S_n \geq n))_{n \geq 1}$.

7.e) Montrer que les deux suites $(P(S_n \leq n))_{n \geq 1}$ et $(P(S_n \geq n))_{n \geq 1}$ convergent.

8.a) Énoncer le théorème limite central et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n)$.

8.b) En déduire, à l'aide des questions 4 et 5, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8.c) Donner un équivalent et la limite de $P(S_n = n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8.d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \geq n)$.

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé, de fonction de répartition F . On appelle médiane de X tout réel m vérifiant :

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}, \quad P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

On admet qu'un tel réel existe toujours.

9. On suppose donné un entier $N \geq 1$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$. Sa loi est stockée dans une liste Python `loi` de longueur N , où `loi[k - 1]` vaut $P(X = k)$ pour $1 \leq k \leq N$.

Écrire une fonction Python `mediane(lois)` qui renvoie une médiane de X .

10. Dans cette question, X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et admet une espérance $E(X)$.

10.a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k).$$

10.b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k).$$

En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$E(|X - r|) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2} \right).$$

10.c) Soit m une médiane de X . On suppose $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E(|X - r|) - E(|X - m|)$. Conclure.

10.d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant les questions 7 et 8, justifier que n est une médiane de X .

En utilisant les questions 10.a) et 8.c), montrer que $E(|X - n|)$ est équivalent à $\sqrt{2n/\pi}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité, dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $M(x) = E(|X - x|)$.

11.a) Établir, pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt.$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$.

En considérant la variable aléatoire $-X$, montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0$.

11.b) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$M(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt + \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt.$$

11.c) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$M(b) - M(a) = \int_a^b (2F(t) - 1) dt.$$

11.d) On note m une médiane de X . Montrer que M atteint son minimum en m .