



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2014

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

Les huit applications s_i sont celles de l'énoncé. On les utilise comme sommes explicites de coefficients, sans faire appel à une théorie supplémentaire.

1.a) La matrice nulle appartient à $\mathcal{E}$. Si $A, B \in \mathcal{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

$$s_7(\alpha A + \beta B) = \alpha s_7(A) + \beta s_7(B) = 0.$$

Ainsi $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.b) Méthode 1 — Une base explicite

La condition imposée est $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 0$, donc $a_{3,3} = -a_{1,1} - a_{2,2}$. Toute matrice de $\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique :

$$A = a_{1,1}(E_{1,1} - E_{3,3}) + a_{2,2}(E_{2,2} - E_{3,3}) + \sum_{i \neq j} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Les six matrices hors diagonale et les deux différences diagonales constituent donc une base. Par conséquent $\dim \mathcal{E} = 8$.

Méthode 2 — Le théorème du rang

L'application linéaire $s_7 : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective : $s_7(tE_{1,1}) = t$ pour tout réel t . Son rang vaut donc 1. Puisque $\mathcal{E} = \text{Ker } s_7$ et $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$, le théorème du rang donne $\dim \mathcal{E} = 9 - 1 = 8$.

La première méthode fournit les matrices d'une base ; la seconde donne directement la dimension lorsqu'une seule condition linéaire non nulle est imposée.

2.a) Chaque s_i est linéaire, car une somme de coefficients d'une combinaison linéaire est la même combinaison des sommes correspondantes. Ainsi, pour $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} :$

$$f(\alpha A + \beta B) = (\alpha s_i(A) + \beta s_i(B))_{1 \leq i \leq 8} = \alpha f(A) + \beta f(B).$$

L'application f est donc linéaire.

2.b) La colonne associée à $E_{k,\ell}$ recense les lignes, colonnes et diagonales auxquelles appartient la case (k, ℓ) . Dans l'ordre imposé par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la cinquième colonne est $f(E_{2,2}) = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$: la case centrale appartient aux deux diagonales.

3.a) Les huit sommes sont nulles pour la matrice nulle, qui appartient donc à $\mathcal{G}$. Si les huit sommes d'une matrice $A \in \mathcal{G}$ valent a , et celles de $B \in \mathcal{G}$ valent b , alors celles de $\alpha A + \beta B$ valent toutes $\alpha a + \beta b$ par linéarité des s_i .

L'ensemble $\mathcal{G}$ est donc stable par combinaison linéaire et constitue un sous-espace vectoriel.

3.b) Si $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{E}$, ses huit sommes sont égales et $s_7(A) = 0$: elles sont donc toutes nulles. Ainsi $f(A) = 0$ et $A \in \text{Ker } f$.

Réciproquement, si $f(A) = 0$, les huit sommes valent 0. Elles sont égales et $s_7(A) = 0$, donc $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{E}$. Par double inclusion :

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \text{Ker } f.$$

3.c) Pour $A \in \mathcal{G}$, notons a la valeur commune de ses huit sommes. Comme $s_i(J) = 3$ pour tout i , la matrice $K = A - (a/3)J$ vérifie $s_i(K) = 0$ pour tout i . Elle appartient à $\text{Ker } f$, et :

$$A = K + \frac{a}{3}J.$$

Pour l'unicité, si $A = K + tJ = K' + t'J$, avec $K, K' \in \text{Ker } f$, appliquer s_1 donne $3t = 3t'$, donc $t = t'$ puis $K = K'$. La décomposition demandée existe et est unique.

3.d) Pour toute matrice A , la somme de ses trois sommes de lignes est égale à celle de ses trois sommes de colonnes. L'image de f est donc contenue dans :

$$H = \{(y_1, \dots, y_8) \in \mathbb{R}^8 : y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - y_5 - y_6 = 0\}.$$

Cette unique équation non nulle permet d'exprimer y_6 en fonction des sept autres coordonnées : $\dim H = 7$. Ainsi $\text{rg } f \leq 7$.

Montrons que les images des sept premières matrices de $\mathcal{B}$ sont libres. Une combinaison de ces matrices a la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & u \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons $f(A) = 0$. La troisième ligne donne $v = 0$. La deuxième colonne donne $b = -e$, la diagonale principale $a = -e$, et l'autre diagonale $c = -e$. La première ligne impose alors $-3e = 0$. Donc $e = a = b = c = 0$. La première colonne donne ensuite $d = 0$, et la troisième colonne $u = 0$.

Tous les coefficients de la combinaison sont nuls : les sept images sont libres. Donc $\text{rg } f \geq 7$. Finalement :

$\text{rg } f = 7$.

3.e) Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } f = 9 - 7 = 2$. Pour construire une base, écrivons une matrice dont les sommes de lignes et de colonnes sont nulles sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ c & d & -c-d \\ -a-c & -b-d & a+b+c+d \end{pmatrix}.$$

Les deux conditions diagonales donnent respectivement :

$$2a + b + c + 2d = 0, \quad -2a - b - c + d = 0.$$

En additionnant ces équations, $3d = 0$, donc $d = 0$, puis $c = -2a - b$. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ -2a-b & 0 & 2a+b \\ a+b & -b & -a \end{pmatrix} = aU + bV,$$

où :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices appartiennent au noyau et engendrent toutes ses matrices. Elles sont libres, puisque leurs coefficients de positions $(1, 1)$ et $(1, 2)$ imposent successivement les deux coefficients d'une combinaison nulle. Ainsi (U, V) est une base de $\text{Ker } f$.

Problème

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1.a) Sur l'ouvert $] -\infty, 1[$, la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe C^1 . Les opérations de somme et produit conservent cette classe. La formule de N définit donc une fonction C^1 sur cet ouvert, en particulier sur $[0, 1[$.

1.b) Méthode 1 — Une fonction auxiliaire

Posons $L(x) = \ln(1-x) + x$. Alors $L(0) = 0$ et, pour $0 \leq x < 1$:

$$L'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = -\frac{x}{1-x} \leq 0.$$

Ainsi $L(x) \leq 0$, ce qui donne $\ln(1-x) \leq -x$. L'inégalité est stricte pour $x > 0$.

Méthode 2 — La tangente d'une fonction concave

La fonction logarithme est concave sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée seconde vaut $-1/t^2 < 0$. Son graphe est sous sa tangente en 1, d'équation $y = t - 1$. Donc $\ln t \leq t - 1$ pour $t > 0$. Avec $t = 1 - x$, on obtient l'inégalité demandée.

La première méthode précise immédiatement le signe strict; la seconde réutilise une propriété générale de concavité.

1.c) En dérivant le produit $(1-x) \ln(1-x)$, on obtient :

$$N'(x) = 2x - 2 + 2 \ln(1-x) + 2 = 2(x + \ln(1-x)).$$

La question précédente donne $N'(x) \leq 0$, avec $N'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

1.d) La fonction N est décroissante et $N(0) = 0$. Par croissance comparée, $(1-x) \ln(1-x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Ainsi $N(x) \rightarrow -1$ à cette borne. La décroissance donne :

$$-1 < N(x) \leq 0 \quad (0 \leq x < 1).$$

Pour $0 < x < 1$, on a même $-1 < N(x) < 0$ puisque N est strictement décroissante.

2.a) Question adaptée au programme actuel : le calcul est directement guidé par Taylor-Young, sans technique de composition de développements limités à supposer connue.

La fonction $L(x) = \ln(1 - x)$ est de classe C^2 au voisinage de 0, avec $L(0) = 0$, $L'(0) = -1$ et $L''(0) = -1$. Taylor-Young donne :

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

2.b) Écrivons précisément $\ln(1 - x) = -x - x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$. En substituant dans la formule de f :

$$f(x) = -2 \frac{-x^2/2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = 1 - 2\varepsilon(x) \rightarrow 1.$$

Le prolongement continu existe et est défini par $f(0) = 1$.

2.c) La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$, car son numérateur est dérivable et $x^2 \neq 0$.

Puisque $(x + \ln(1 - x))' = -x/(1 - x)$:

$$f'(x) = -2 \frac{-x^3/(1 - x) - 2x(x + \ln(1 - x))}{x^4}.$$

En mettant au même dénominateur et en simplifiant par $x > 0$, le numérateur intérieur devient :

$$-x^2 - 2(1 - x)(x + \ln(1 - x)) = x^2 - 2x - 2(1 - x)\ln(1 - x) = N(x).$$

On obtient donc $f'(x) = -2N(x)/(x^3(1 - x))$.

2.d) Pour $0 < x < 1$, le dénominateur $x^3(1 - x)$ est strictement positif et $N(x) < 0$, donc $f'(x) > 0$. La continuité en 0 et cette croissance sur $]0, 1[$ donnent la stricte croissance sur $[0, 1[$. En effet, pour $x > 0$, $f(x) > f(x/2) \geq f(0)$, la dernière inégalité résultant du passage à la limite dans la monotonie.

À l'autre borne, $x + \ln(1 - x) \rightarrow -\infty$ et $x^2 \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

x	0	1^-
$f(x)$	1	$\nearrow +\infty$

Le théorème de la bijection pour une fonction continue strictement monotone donne donc une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

3.a) Question adaptée au programme actuel : l'indication à la borne finie permet de se ramener à une fonction continue sur un segment.

Pour $0 < x < 1$, la définition de f donne :

$$g_n(x) = \exp(n(x + \ln(1 - x))) = e^{nx}(1 - x)^n.$$

Cette identité reste vraie en 0, les deux membres y valant 1. Pour $n \geq 1$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 1^-$. Il suffit de poser $g_n(1) = 0$ pour obtenir une fonction continue sur $[0, 1]$.

Son intégrale sur ce segment existe. Par continuité du prolongement, elle est aussi la limite des intégrales sur $[0, b]$ lorsque $b \rightarrow 1^-$. L'intégrale annoncée converge donc.

3.b) On a $f(x) \geq 1$ sur $[0, 1]$. Comme $-nx^2/2 \leq 0$ et l'exponentielle est croissante :

$$0 < g_n(x) = e^{-nx^2 f(x)/2} \leq e^{-nx^2/2}.$$

L'encadrement demandé, avec l'inégalité large à gauche, en résulte.

3.c) Par positivité de l'intégrale et passage à la limite à la borne 1 :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nx^2/2} dx.$$

Le changement affine $u = \sqrt{n} x$ donne :

$$\int_0^1 e^{-nx^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (\Phi(\sqrt{n}) - \Phi(0)).$$

Puisque $\Phi(0) = 1/2$, c'est l'encadrement annoncé.

3.d) Une fonction de répartition est majorée par 1, donc $\Phi(\sqrt{n}) - 1/2 \leq 1/2$. La question précédente donne :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4.a) Pour $n \geq 1$, $n+2 \geq 3$ et $\ln(n+2) \geq \ln 3 > 1$. Ainsi $0 < 1/\ln(n+2) < 1$, c'est-à-dire $0 < v_n < 1$.

4.b) Comme $\ln(n+2) \rightarrow +\infty$, on a $v_n \rightarrow 0$. La fonction f prolongée est continue en 0 et vaut 1 en ce point. Par composition des limites :

$$w_n = f(v_n) \rightarrow 1.$$

En outre, $w_n \geq 1$, donc toutes les racines carrées et tous les quotients qui suivent sont définis.

4.c) L'intégrande étant positif et $v_n < 1$, on a d'abord $I_n \geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx$. Pour $0 \leq x \leq v_n$, la croissance de f donne $f(x) \leq f(v_n) = w_n$. Donc :

$$g_n(x) \geq \exp(-nx^2 w_n / 2).$$

En intégrant, puis en effectuant le changement affine $u = \sqrt{nw_n} x$:

$$\int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} e^{-nw_n x^2 / 2} dx = \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} e^{-u^2 / 2} du.$$

La dernière comparaison demandée est donc même une égalité.

4.d) La dernière intégrale vaut $\sqrt{2\pi}(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - 1/2)$. Multiplier l'encadrement inférieur de 4.c) par $\sqrt{2n/\pi} > 0$ donne :

$$\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

La borne supérieure de 3.d) donne l'autre inégalité, avec second membre égal à 1.

4.e) On a $w_n \rightarrow 1$, et, par croissance comparée :

$$v_n \sqrt{nw_n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)} \sqrt{w_n} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi $\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) \rightarrow 1$, et le membre de gauche en 4.d) tend vers $2(1 - 1/2) = 1$. Le théorème d'encadrement donne $I_n \sqrt{2n/\pi} \rightarrow 1$, soit :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

5.a) Une intégration par parties sur le segment $[0, x]$, avec $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$, donne :

$$J_1(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = -xe^{-x} + 1 - e^{-x}.$$

$$\text{Ainsi } J_1(x) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

5.b) Pour $n \geq 1$, une intégration par parties sur $[0, x]$ donne :

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt = -x^n e^{-x} + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Le terme en 0 est nul, car $n \geq 1$. Après division par $n!$, on obtient :

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

$$\text{Pour } n = 1, \text{ on utilise bien } J_0(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}.$$

5.c) En sommant les relations précédentes pour les indices 1 à n , les termes intermédiaires s'éliminent :

$$J_n(x) = J_0(x) - e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Cette formule est également vraie pour $n = 0$, par la définition de J_0 .

5.d) Pour n fixé, chaque terme $x^k e^{-x}$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, par croissance comparée. La somme en 5.c) étant finie, $J_n(x) \rightarrow 1$. Pour $n \geq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = n!.$$

L'intégrande est continue et positive : cette limite finie est exactement la convergence de l'intégrale généralisée. Pour $n = 0$, on calcule directement $\int_0^x e^{-t} dt \rightarrow 1 = 0!$. Ainsi, dans tous les cas :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!.$$

5.e) D'après 3.a), $I_n = \int_0^1 e^{nx}(1-x)^n dx$, l'intégrande étant prolongée continûment en 1. Dans cette intégrale sur un segment, le changement affine strictement décroissant $t = n(1-x)$ donne $x = 1 - t/n$, $dx = -dt/n$, et les bornes deviennent n puis 0. Il vient :

$$I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n t^n e^{-t} dt = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n).$$

6.a) Les X_i sont indépendantes et suivent chacune la loi de Poisson de paramètre 1. Par stabilité des sommes de variables de Poisson indépendantes, leur somme suit la loi de Poisson dont le paramètre est la somme des paramètres :

$$S_n \sim \mathcal{P}(n).$$

6.b) En utilisant la loi de S_n et 5.c) :

$$P(S_n \leq n) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = 1 - J_n(n).$$

Comme S_n est entière, l'événement contraire de $\{S_n \geq n\}$ est $\{S_n \leq n-1\}$. Donc :

$$P(S_n \geq n) = 1 - e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = J_{n-1}(n).$$

Le décalage d'une unité est nécessaire dans la seconde formule.

7.a) Pour $x > 0$:

$$h'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

Le facteur $x^{n-1}e^{-x}$ est strictement positif. La fonction est donc strictement croissante de 0 à n , puis strictement décroissante de n à $+\infty$. Elle vérifie $h_n(0) = 0$, atteint son maximum $n^n e^{-n}$ en n , et tend vers 0 à l'infini par croissance comparée. La dérivée à droite en 0 vaut 1 si $n = 1$ et 0 si $n > 1$; cela ne modifie pas les variations.

7.b) Posons $p_n = P(S_n \leq n) = 1 - J_n(n)$. D'après 5.b) :

$$J_{n+1}(n) = J_n(n) - \frac{h_{n+1}(n)}{(n+1)!}.$$

D'autre part, par la relation de Chasles :

$$J_{n+1}(n+1) - J_{n+1}(n) = \frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt.$$

En combinant ces égalités :

$$p_{n+1} - p_n = -J_{n+1}(n+1) + J_n(n) = -\frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt - h_{n+1}(n) \right).$$

L'intervalle d'intégration ayant longueur 1, cette expression est bien :

$$p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt.$$

7.c) La fonction h_{n+1} est strictement croissante sur $[n, n+1]$, d'après 7.a). L'intégrande en 7.b) est donc positive pour $n < t \leq n+1$, et continue. Son intégrale est strictement positive. Par conséquent $p_{n+1} - p_n < 0$: la suite (p_n) est strictement décroissante.

7.d) Posons $q_n = P(S_n \geq n) = J_{n-1}(n)$. Les relations de 5.b) et de Chasles donnent :

$$q_{n+1} - q_n = J_n(n+1) - J_{n-1}(n) = \frac{1}{n!} \left(\int_n^{n+1} h_n(t) dt - h_n(n) \right),$$

donc :

$$q_{n+1} - q_n = \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} (h_n(t) - h_n(n)) dt.$$

La fonction h_n est strictement décroissante sur $[n, n+1]$. L'intégrande est strictement négative pour $n < t \leq n+1$, donc $q_{n+1} - q_n < 0$. La seconde suite est elle aussi strictement décroissante.

7.e) Les deux suites sont décroissantes et minorées par 0, puisque leurs termes sont des probabilités. Le théorème de convergence monotone assure donc leur convergence. Leurs limites seront déterminées à la question 8.

8.a) Le théorème limite central affirme que, si des variables (Y_i) sont indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$, alors :

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Autrement dit, pour tout réel t , les fonctions de répartition convergent vers $\Phi(t)$.

Ici les X_i sont indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre 1, et ont pour espérance et variance 1. Toutes les hypothèses sont donc satisfaites avec $\mu = \sigma = 1$. Comme :

$$\{S_n \leq n\} = \left\{ \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0 \right\},$$

la convergence des fonctions de répartition au point 0, où Φ est continue, donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

8.b) La question 6.b) donne $J_n(n) = 1 - p_n \rightarrow 1/2$. Cette quantité est strictement positive, car c'est une intégrale d'une fonction positive sur un intervalle non réduit à un point. L'identité de 5.e) peut donc s'écrire :

$$n! = \frac{I_n}{J_n(n)} n^{n+1} e^{-n}.$$

Comme $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$ et $J_n(n) \rightarrow 1/2$, le quotient de $n!$ par l'expression ci-dessous tend vers 1 :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Cette formule vient d'être démontrée grâce à l'intégrale de la partie I et au théorème limite central ; elle n'est pas utilisée comme un résultat de cours préalable.

8.c) La loi de Poisson donne $P(S_n = n) = e^{-n} n^n / n!$. En divisant par l'équivalent de la factorielle obtenu en 8.b), qui est strictement positif :

$$P(S_n = n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Cet équivalent tend vers 0, donc $P(S_n = n) \rightarrow 0$.

8.d) Les événements $\{S_n \leq n\}$ et $\{S_n \geq n\}$ recouvrent l'univers et leur intersection est $\{S_n = n\}$. Ainsi :

$$q_n = 1 - p_n + P(S_n = n).$$

Les questions 8.a) et 8.c) donnent alors $q_n \rightarrow 1 - 1/2 + 0 = 1/2$.

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

9. Code adapté en Python. On recherche le premier entier k tel que $F(k) \geq 1/2$, en cumulant les probabilités dans l'ordre des valeurs possibles.

Python

```
def mediane(loi):
    k = 1
    cumul = loi[0]
    while cumul < 0.5:
        k = k + 1
        cumul = cumul + loi[k - 1]
    return k
```

La liste est supposée être une loi de probabilité valide, comme dans l'énoncé : ses termes sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1. La boucle s'arrête au plus tard lorsque $k = N$. À chaque test, cumul représente $P(X \leq k)$.

Pour l'entier renvoyé, $F(k) \geq 1/2$ et $F(k-1) < 1/2$, avec $F(0) = 0$ si $k = 1$. Par conséquent :

$$P(X \geq k) = 1 - F(k-1) > \frac{1}{2}.$$

Les deux conditions de médiane sont satisfaites. La fonction renvoie bien une médiane, y compris pour $N = 1$ et pour une loi comportant des probabilités nulles. En cas d'égalité exacte à $1/2$, elle choisit la première valeur atteignant ce seuil. Ce code a été exécuté sur des lois finies, notamment les cas de probabilité nulle et d'égalité au seuil.

10.a) Puisque $X \geq 0$ et $E(X) < +\infty$, l'inégalité $|X - r| \leq X + r$ assure l'existence de $E(|X - r|)$. Pour chaque entier k , $|k - r| = k - r$ lorsque $k \geq r$, et $|k - r| = (k - r) + 2(r - k)$ lorsque $k < r$. Le transfert discret donne donc :

$$E(|X - r|) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - r)P(X = k) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k).$$

La première série converge absolument car $|k - r| \leq k + r$. Sa somme est $E(X) - r$, par linéarité. Ainsi :

$$E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k).$$

10.b) Tous les indices ci-dessous sont dans un ensemble fini ; on peut donc réordonner les sommes sans difficulté de convergence :

$$\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=0}^k P(X = j) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=j}^{r-1} P(X = j) = \sum_{j=0}^{r-1} (r - j)P(X = j).$$

Il y a en effet $r - j$ indices k compris entre j et $r - 1$. La substitution dans 10.a) donne :

$$E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} F(k) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2} \right).$$

10.c) La propriété de médiane, avec m entier, signifie $F(m) \geq 1/2$ et $1 - F(m-1) \geq 1/2$, donc $F(m-1) \leq 1/2$.

Si $r > m$, la différence des formules de 10.b) est :

$$E(|X - r|) - E(|X - m|) = 2 \sum_{k=m}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2} \right) \geq 0,$$

car $F(k) \geq F(m) \geq 1/2$ pour tous ces indices.

Si $1 \leq r < m$, la différence est :

$$E(|X - r|) - E(|X - m|) = -2 \sum_{k=r}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2} \right) \geq 0,$$

car $F(k) \leq F(m-1) \leq 1/2$. Enfin elle est nulle lorsque $r = m$.

Ainsi une médiane entière positive minimise l'écart absolu moyen parmi les entiers positifs. On peut également conclure à un minimum sur $\mathbb{R}$: la même formule vaut en $r = 0$ avec une somme vide, et le cas $r = 0 < m$ se traite de la même façon ; entre deux entiers, $E(|X - x|)$ est affine, puisque chaque fonction $|k - x|$ y est affine ; enfin, pour $x < 0$, $E(|X - x|) = E(X) - x \geq E(X)$. Aucune valeur réelle ne fait donc mieux que la médiane m . Le minimum peut être atteint en plusieurs points.

10.d) Pour une variable X de loi $\mathcal{P}(n)$, on a $P(X \leq n) = p_n$ et $P(X \geq n) = q_n$. D'après 7 et 8, chacune de ces suites est décroissante et converge vers $1/2$; tous ses termes sont donc supérieurs ou égaux à $1/2$. Ainsi n est une médiane de X .

Pour calculer l'écart absolu, notons $p_k^{(n)} = e^{-n} n^k / k!$. La relation $k p_k^{(n)} = n p_{k-1}^{(n)}$ est valable pour $k \geq 1$. Comme $E(X) = n$, la question 10.a) donne :

$$E(|X - n|) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) p_k^{(n)} = 2n \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-2} p_k^{(n)} \right) = 2n p_{n-1}^{(n)}.$$

Pour $n = 1$, la seconde somme est vide et vaut 0 ; la même identité reste vraie. Puisque $p_{n-1}^{(n)} = p_n^{(n)}$, on a exactement $E(|X - n|) = 2nP(X = n)$. La question 8.c) conduit à :

$$E(|X - n|) \sim \frac{2n}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

11.a) L'existence de $E(X)$ signifie ici $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt < +\infty$. Pour $x \geq 0$, on a $t \geq x \geq 0$ sur $[x, +\infty[$ et $f(t) \geq 0$. Donc :

$$0 \leq x(1 - F(x)) = \int_x^{+\infty} xf(t) dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt.$$

Le membre de droite est le reste à l'infini d'une intégrale convergente de fonction positive : il tend vers 0. Par encadrement, $x(1 - F(x)) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

La variable $Y = -X$ admet également une espérance et possède la densité continue $t \mapsto f(-t)$. En appliquant le résultat précédent à Y , pour $y \rightarrow +\infty$:

$$yP(Y > y) = yP(X < -y) = yF(-y) \rightarrow 0.$$

La dernière égalité utilise l'absence d'atomes d'une variable à densité. En posant $x = -y$, on en déduit $xF(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

11.b) Pour tout réel fixé x , $|X - x| \leq |X| + |x|$, donc $M(x)$ existe. Le transfert donne :

$$M(x) = \int_{-\infty}^x (x - t)f(t) dt + \int_x^{+\infty} (t - x)f(t) dt.$$

La continuité de f assure que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Pour $a < x$, une intégration par parties sur le segment $[a, x]$ donne :

$$\int_a^x (x - t)f(t) dt = -(x - a)F(a) + \int_a^x F(t) dt.$$

Lorsque $a \rightarrow -\infty$, le membre de gauche tend vers une intégrale convergente. D'après

11.a) et $F(a) \rightarrow 0$, $(x - a)F(a) \rightarrow 0$. Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^x F(t) dt$ converge et :

$$\int_{-\infty}^x (x - t)f(t) dt = \int_{-\infty}^x F(t) dt.$$

Pour $b > x$, une seconde intégration par parties, utilisant cette fois la primitive $F - 1$ de

f , donne :

$$\int_x^b (t-x)f(t) dt = -(b-x)(1-F(b)) + \int_x^b (1-F(t)) dt.$$

Le terme de bord tend vers 0 par 11.a) et $1-F(b) \rightarrow 0$. On obtient de la même façon la convergence de l'intégrale de droite et :

$$\int_x^{+\infty} (t-x)f(t) dt = \int_x^{+\infty} (1-F(t)) dt.$$

En additionnant les deux égalités :

$$M(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt + \int_x^{+\infty} (1-F(t)) dt.$$

Toutes les intégrations par parties ont été effectuées sur des segments avant le passage aux limites ; aucun échange d'intégrales n'est utilisé.

11.c) Les intégrales généralisées en 11.b) sont convergentes. La relation de Chasles, avec la convention des intégrales orientées si $b < a$, donne :

$$\int_{-\infty}^b F(t) dt - \int_{-\infty}^a F(t) dt = \int_a^b F(t) dt,$$

$$\int_b^{+\infty} (1-F(t)) dt - \int_a^{+\infty} (1-F(t)) dt = - \int_a^b (1-F(t)) dt.$$

En additionnant, il vient pour tous réels a, b :

$$M(b) - M(a) = \int_a^b (2F(t) - 1) dt.$$

11.d) Comme X est à densité, $P(X = m) = 0$. Les conditions de médiane donnent donc simultanément $F(m) \geq 1/2$ et $1-F(m) \geq 1/2$. Ainsi $F(m) = 1/2$.

Méthode 1 — Le signe de l'intégrale

Si $x \geq m$, la croissance de F donne $2F(t) - 1 \geq 0$ pour $m \leq t \leq x$. D'après 11.c),

$$M(x) - M(m) = \int_m^x (2F(t) - 1) dt \geq 0.$$

Si $x < m$, on a $2F(t) - 1 \leq 0$ pour $x \leq t \leq m$, donc

$$M(x) - M(m) = - \int_x^m (2F(t) - 1) dt \geq 0.$$

Ainsi $M(x) \geq M(m)$ pour tout réel x : le minimum est global et atteint en m .

Méthode 2 — Les variations de M

Fixons un réel a . La question 11.c) écrit $M(x) = M(a) + \int_a^x (2F(t) - 1) dt$. Puisque F est continue, le théorème fondamental du calcul intégral donne $M'(x) = 2F(x) - 1$.

Pour $x \leq m$, on a $F(x) \leq 1/2$, donc $M'(x) \leq 0$. Pour $x \geq m$, on a $F(x) \geq 1/2$, donc $M'(x) \geq 0$. Ainsi M décroît jusqu'à m , puis croît à partir de m : elle atteint son minimum global en m .

La première méthode compare directement deux valeurs ; la seconde donne les variations de la fonction entière. L'unicité du minimum n'est pas affirmée : si F est constante égale à $1/2$ sur un intervalle, M y est constante et minimale.

Relevé des adaptations

- Partie I, 2.a) : indication d'appliquer directement Taylor-Young à $x \mapsto \ln(1 - x)$, pour ne pas supposer connue une technique générale de composition des développements limités.
- Partie I, 3.a) : guidage à la borne finie 1 par réécriture et prolongement continu de g_n , afin de ramener la convergence à une intégrale sur un segment.

- Partie III, 9 : Code adapté en Python ; remplacement du type de tableau ancien par une liste, définition de l'indexation et conservation de l'objectif de calcul d'une médiane.