



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2013

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$ le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

Les calculs sur les endomorphismes de E peuvent être conduits sur leurs matrices dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.

- 1.a) Rappeler la dimension de E .
 - 1.b) Montrer que f est un endomorphisme de E .
 - 1.c) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E .
 - 1.d) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n .
 - 1.e) Préciser le noyau $\text{Ker } f$ de f ainsi qu'une base de $\text{Ker } f$.
 - 1.f) Déterminer l'image $\text{Im } f$ de f .
2. On note id_E et 0_E respectivement l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E , et pour tout endomorphisme v de E , on pose $v^0 = \text{id}_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.

Soient u et g deux endomorphismes de E tels que :

$$u^4 = 0_E, \quad u^3 \neq 0_E, \quad g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3.$$

- 2.a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \text{Ker}(u^3)$. Montrer que la famille $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une base de E .
- 2.b) Montrer que g est un automorphisme de E et déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u .
- 2.c) Établir l'égalité : $\text{Ker } u = \text{Ker}(g - \text{id}_E)$.

2.d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g .

Problème

Le problème aborde l'évolution du prix de vente d'un bien sous différents modes d'anticipation d'agents économiques, puis certaines propriétés de la fonction de profit d'une entreprise.

On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Les quatre parties sont très largement indépendantes. Les questions 10 et 11 font appel aux résultats de la partie III.

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale des consommateurs, O la fonction d'offre globale des entreprises et p le prix de vente du bien.

On suppose habituellement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est décroissante et que la fonction $O : p \mapsto O(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est croissante.

Si l'équation $O(p) = D(p)$ admet une solution p^* , on dit que p^* est un prix d'équilibre du marché.

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par un excès d'offre, lorsque $O(p) > D(p)$, ou un excès de demande, lorsque $D(p) > O(p)$, au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la valeur du prix à l'instant n . On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ la quantité offerte O_n à l'instant n à un prix anticipé à l'instant $n - 1$, noté $\hat{p}_n$, selon la relation $O_n = O(\hat{p}_n)$, où $\hat{p}_0$

peut être interprété comme un prix d'étude de marché.

On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels strictement positifs a, b, c, d , avec $a > d$, et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$D(p) = a - bp, \quad O(p) = cp + d.$$

Pour l'étude mathématique des récurrences, ces formules affines sont prolongées à $\mathbb{R}$; seules les valeurs non négatives ont l'interprétation économique de prix.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(p_n) = a - bp_n$ et $O(\hat{p}_n) = c\hat{p}_n + d$.

1. Dans cette question uniquement, les réels a, b, c, d ont les valeurs suivantes : $a = 40$, $b = 8$, $c = 2$, $d = 20$.

On suppose que p_0 et p_1 sont donnés et que, pour tout entier $n \geq 2$, $\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.

1.a) Établir l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre p^* . Calculer p^* .

1.b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$.

1.c) Écrire une fonction Python récursive d'en-tête `def p(p0, p1, n)` : qui renvoie, pour p_0 et p_1 fixés, le terme p_n , où $n \in \mathbb{N}$.

Une fonction récursive peut s'appeler elle-même avec un argument plus petit. Ici, les cas $n = 0$ et $n = 1$ doivent être traités directement; les autres valeurs se calculent par la relation de 1.b) à partir des appels d'indices $n - 1$ et $n - 2$.

1.d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = p_n - p^*$. Montrer que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

1.e) Calculer les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique de la suite (v_n) .

1.f) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de $n, r_1, r_2, p_0, p_1, p^*$.

1.g) Montrer que la suite (p_n) est convergente. Quelle est sa limite? Interpréter.

2. Soit β un paramètre réel vérifiant $0 < \beta < 1$. On suppose que le prix p_0 est donné et que les anticipations de prix sont adaptatives, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1}).$$

2.a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prix courant p_n en fonction du prix anticipé $\hat{p}_n$.

2.b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le prix p_n vérifie l'équation de récurrence suivante :

$$p_n = \left(1 - \beta \frac{b+c}{b}\right) p_{n-1} + \beta \frac{a-d}{b}.$$

2.c) Quel est le prix d'équilibre p^* ? Déterminer l'expression de p_n en fonction de n, p_0, p^*, b, c, β .

2.d) En supposant que $p_0 \neq p^*$, montrer que la suite (p_n) converge si et seulement si $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1$. Quelle est alors sa limite?

2.e) Étudier la convergence de la suite (p_n) lorsque $c < b$.

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

3. Soit p un paramètre réel positif ou nul et h_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$h_p(x) = px - \frac{x^3}{3}.$$

3.a) Dresser le tableau de variation de h_p sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les limites aux bornes de l'intervalle de définition, les racines de l'équation $h_p(x) = 0$ et la valeur maximale de h_p sur $\mathbb{R}_+$.

3.b) Tracer la courbe représentative de h_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

On considère une entreprise présente sur le marché d'un bien qui adapte son volume de production $x \in \mathbb{R}_+$ à un niveau de prix $p \in \mathbb{R}_+$ donné par l'équilibre du marché ou administré par l'État.

On modélise le coût total de cette entreprise par une fonction F définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sa dérivée F' , telle que $F(0) = F'(0) = 0$ et $F(x) \sim sx^r$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, avec $s > 0$ et $r > 1$.

On note F'' la dérivée seconde de F et on suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F''(x) > 0$.

Soit Π_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que $\Pi_p(x) = px - F(x)$.

4.a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = +\infty$ et que F' admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque, que l'on note S , dont on précisera l'ensemble de définition. La fonction S est la fonction d'offre de l'entreprise.

4.b) Montrer que Π_p est concave sur $\mathbb{R}_+$ et admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum atteint en un seul point.

5. Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que :

$$M(p) = \max_{x \in \mathbb{R}_+} \Pi_p(x).$$

La fonction M est la fonction de profit de l'entreprise.

5.a) Pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, exprimer $M(p)$ à l'aide de p, F, S .

5.b) Montrer que la fonction M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée M' ; en 0, on entend la dérivée à droite.

5.c) Montrer que la fonction M est convexe et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

6. On suppose que le prix p est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

6.a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$M(p^{(i)}) - M(y) \geq M'(y)(p^{(i)} - y).$$

6.b) En déduire, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité :

$$E(M(p)) \geq M(y) + M'(y)(E(p) - y).$$

6.c) Établir l'inégalité $E(M(p)) \geq M(E(p))$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

7. On suppose que le prix p est une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, dont la densité f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} M(x)f(x) dx$.

Justifier que p admet une espérance et montrer que $E(M(p)) \geq M(E(p))$.

Partie III. Espérance conditionnelle dans le cas fini

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_q\} \subset \mathbb{R}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_r\} \subset \mathbb{R}$ respectivement, où $q \geq 2$ et $r \geq 2$; les valeurs de chaque liste sont distinctes.

On suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, $P(X = x_i) > 0$.

Soit φ la fonction définie sur $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ à valeurs réelles telle que :

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^r y_j P_{[X=x_i]}(Y = y_j).$$

Pour tout i , le réel $\varphi(x_i)$ est appelé espérance conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = x_i]$, et se note également $E(Y \mid X = x_i)$.

On définit alors une variable aléatoire Z par $Z(\omega) = \varphi(X(\omega))$ et on note $Z = E(Y \mid X) = \varphi(X)$.

La même définition s'applique à une variable finie constante ou à toute fonction de variables finies, en regroupant les valeurs égales dans son support.

8.a) On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer la variable aléatoire $E(Y \mid X)$.

8.b) Quelle est la variable aléatoire $E(X \mid X)$?

8.c) On suppose que les réels $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_q)$ sont deux à deux distincts. Déterminer, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, $P(E(Y \mid X) = \varphi(x_i))$.

8.d) Montrer que $E(E(Y | X)) = E(Y)$. On pourra appliquer le théorème du transfert.

8.e) Soient les réels λ, ρ, μ . Exprimer $E(\lambda Y + \rho X + \mu | X)$ en fonction de $\lambda, \rho, \mu, X, E(Y | X)$.

Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

Dans cette partie, on suppose qu'à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, le prix p_n est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à support fini inclus dans $\mathbb{R}_+$ et comportant au moins deux valeurs. Le support peut dépendre de n ; chacune de ses valeurs a une probabilité strictement positive.

On suppose que toutes les variables p_n ont la même espérance et la même variance.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes finies indépendantes et de même loi, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(u_n) = 0$ et $V(u_n) = \sigma^2 > 0$.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables u_n et p_{n-1} sont indépendantes.

Soient θ et p^* deux paramètres réels vérifiant $-1 < \theta < 1$ et $p^* > 0$.

On suppose $p_0 = \ell u_0 + m$, où ℓ et m sont des constantes réelles, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^* + u_n. \quad (1)$$

9.a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(p_n)$ et $V(p_n)$. Déterminer les constantes ℓ et m en fonction de θ et p^* .

9.b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la covariance $\text{Cov}(p_n, p_{n-1})$. Que représente le paramètre θ pour le couple (p_n, p_{n-1}) ?

10. Déterminer la variable aléatoire $E(p_n | p_{n-1})$.

11. On rappelle que $\hat{p}_n$ est l'anticipation de p_n faite à l'instant $n - 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_n = p_n - \hat{p}_n$, l'erreur d'anticipation à l'instant n .

11.a) On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont naïves, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{p}_n = p_{n-1}$.

Déterminer $E(\hat{p}_n \mid p_{n-1})$. Calculer $E(\hat{p}_n)$, $V(\hat{p}_n)$, $E(e_n)$ et $V(e_n)$.

11.b) On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont rationnelles, ce qui se traduit dans le cadre du modèle (1) par $\hat{p}_n = E(p_n \mid p_{n-1})$.

Déterminer $E(\hat{p}_n \mid p_{n-1})$. Calculer $E(\hat{p}_n)$, $V(\hat{p}_n)$, $E(e_n)$ et $V(e_n)$.

11.c) Comparer les deux types d'anticipation naïve et rationnelle.