



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2013

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

On utilise la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $E = \mathbb{R}_3[X]$. Les coordonnées dans cette base identifient E à $\mathbb{R}^4$; les compositions d'endomorphismes se calculent par produits de leurs matrices.

1.a) Les quatre polynômes $1, X, X^2, X^3$ forment une base de E , donc $\dim E = 4$.

1.b) Écrivons $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. On a $P' = b + 2cX + 3dX^2$, d'où :

$$f(P) = -3aX - 2bX^2 - cX^3.$$

Le terme en X^4 s'annule : l'image appartient bien à E . La dérivation et les multiplications par les polynômes fixés X et X^2 sont linéaires ; pour $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on obtient donc $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$. Ainsi f est un endomorphisme de E .

1.c) Les images des vecteurs de base sont $f(1) = -3X$, $f(X) = -2X^2$, $f(X^2) = -X^3$ et $f(X^3) = 0$. Leurs coordonnées constituent les colonnes de :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.d) La quatrième colonne est nulle, donc ${}^t(M(0, 0, 0, 1)) = 0$ avec un vecteur non nul. Ainsi M n'est pas inversible.

Chaque application de M décale les coordonnées d'un rang vers le bas, avec les

coefficients successifs $-3, -2, -1$. Les produits donnent :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^4 = 0.$$

Pour tout $n \geq 4$, $M^n = M^4 M^{n-4} = 0$; le cas $n = 1$ est la matrice de 1.c).

Si $MV = \lambda V$ avec $V \neq 0$, alors $0 = M^4 V = \lambda^4 V$, donc $\lambda = 0$. Cette valeur est effectivement propre puisque le quatrième vecteur de la base canonique est dans le noyau. Le spectre est donc $\{0\}$. Si M était diagonalisable, sa matrice diagonale semblable serait nulle, ce qui entraînerait $M = 0$, contrairement au coefficient -3 . La matrice M n'est donc pas diagonalisable. Cette démonstration ne fait intervenir aucun déterminant.

1.e) D'après 1.b), $f(P) = 0$ équivaut à $a = b = c = 0$, sans restriction sur d . Ainsi :

$$\text{Ker } f = \{dX^3 : d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^3).$$

Une base du noyau est (X^3) , et sa dimension est 1.

1.f) La formule de 1.b) montre que toute image est une combinaison de X, X^2, X^3 .

Réciproquement, pour des réels α, β, γ , le polynôme $P = -\alpha/3 - (\beta/2)X - \gamma X^2$ vérifie $f(P) = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3$. Par conséquent :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(X, X^2, X^3).$$

Ces trois polynômes sont libres, donc forment une base de l'image. Le rang de f est 3, en accord avec le théorème du rang : $4 = 1 + 3$.

2.a) L'hypothèse $u^3 \neq 0_E$ assure qu'un tel P existe. Fixons-le et supposons :

$$a_0 P + a_1 u(P) + a_2 u^2(P) + a_3 u^3(P) = 0.$$

Appliquons u^3 . Tous les termes sauf le premier contiennent une puissance au moins égale à 4 de u , donc sont nuls. Il reste $a_0 u^3(P) = 0$, d'où $a_0 = 0$ puisque $u^3(P) \neq 0$.

En appliquant u^2 à la relation restante, on obtient $a_1 u^3(P) = 0$, donc $a_1 = 0$.

L'application de u donne ensuite $a_2 u^3(P) = 0$, donc $a_2 = 0$. Enfin $a_3 u^3(P) = 0$ donne $a_3 = 0$.

La famille est libre et contient quatre éléments dans un espace de dimension 4 : c'est une base de E . Les mêmes opérations sont des multiplications par les matrices U^3, U^2, U , où $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

2.b) Les puissances de u commutent entre elles. En développant les produits et en utilisant $u^4 = 0_E$, on obtient :

$$(\text{id}_E - u) \circ (\text{id}_E + u + u^2 + u^3) = \text{id}_E - u^4 = \text{id}_E.$$

Le produit dans l'autre ordre donne aussi id_E . Ainsi g est inversible, donc est un automorphisme, et :

$$g^{-1} = \text{id}_E - u.$$

Il s'agit d'une identité concrète de produits matriciels, qui justifie directement l'inverse sans supposer un résultat général sur les endomorphismes nilpotents.

2.c) On a $g - \text{id}_E = u + u^2 + u^3 = u \circ g = g \circ u$, les termes en u^4 étant nuls.

Si $Q \in \text{Ker } u$, alors $(g - \text{id}_E)(Q) = g(u(Q)) = 0$, donc $Q \in \text{Ker}(g - \text{id}_E)$.

Réciproquement, si $(g - \text{id}_E)(Q) = 0$, alors $g(u(Q)) = 0$. L'injectivité de g , établie en 2.b), impose $u(Q) = 0$. Les deux inclusions donnent :

$$\text{Ker } u = \text{Ker}(g - \text{id}_E).$$

2.d) Méthode 1 — Une identité matricielle

Puisque $g - \text{id}_E = u \circ g$ et que u et g commutent, quatre produits successifs donnent $(g - \text{id}_E)^4 = u^4 \circ g^4 = 0_E$.

Si $g(Q) = \lambda Q$ pour $Q \neq 0$, alors $(g - \text{id}_E)^4(Q) = (\lambda - 1)^4 Q = 0$, d'où $\lambda = 1$. Pour vérifier que cette valeur existe, choisissons P comme en 2.a). Le polynôme $u^3(P)$ est non nul et $u(u^3(P)) = 0$, donc $g(u^3(P)) = u^3(P)$.

Ainsi 1 est bien une valeur propre de g et c'est la seule.

Méthode 2 — La base construite en 2.a)

Dans la base $\mathcal{C} = (P, u(P), u^2(P), u^3(P))$, les images par g se lisent directement :

$$g(P) = P + u(P) + u^2(P) + u^3(P),$$

$$g(u(P)) = u(P) + u^2(P) + u^3(P),$$

$$g(u^2(P)) = u^2(P) + u^3(P), \quad g(u^3(P)) = u^3(P).$$

La matrice associée est donc :

$$G_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda \neq 1$, le système $G_{\mathcal{C}}V = \lambda V$ impose successivement, de la première à la quatrième ligne, que les quatre coordonnées de V soient nulles. Une telle valeur ne peut donc être propre. Pour $\lambda = 1$, le quatrième vecteur de la base fournit un vecteur propre non nul. On retrouve le spectre $\{1\}$.

La première méthode utilise une identité de produits et se transpose facilement aux calculs de matrices ; la seconde donne une lecture concrète de l'action de g dans la base déjà construite.

Problème

Partie I. Prix d'équilibre

1.a) L'égalité de l'offre et de la demande s'écrit $2p + 20 = 40 - 8p$, soit $10p = 20$. Elle admet l'unique solution $p^* = 2$, qui appartient bien à $\mathbb{R}_+$.

1.b) À l'instant $n \geq 2$, l'égalité $O(\hat{p}_n) = D(p_n)$ donne :

$$2(2p_{n-1} - p_{n-2}) + 20 = 40 - 8p_n.$$

En isolant p_n et en divisant par $8 \neq 0$, on obtient :

$$p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}.$$

1.c) Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : le rôle des appels récursifs est expliqué dans le sujet.

La fonction suivante n'utilise aucune bibliothèque ; aucun import n'est nécessaire.

Python

```
def p(p0, p1, n):  
    if n == 0:  
        return p0  
    elif n == 1:  
        return p1  
    else:  
        return -0.5 * p(p0, p1, n - 1) + 0.25 * p(p0, p1, n - 2) + 2.5
```

L'argument n est un entier positif ou nul. Les deux premières branches renvoient les conditions initiales ; la dernière applique exactement la relation de 1.b). Dans chaque appel, l'indice diminue jusqu'à 0 ou 1, donc le calcul se termine. Une récurrence sur n justifie que la valeur renvoyée est p_n .

Cette écriture respecte la demande de récursion ; elle recalcule plusieurs fois certains termes et convient surtout à de petits indices. Le code a été exécuté et comparé à un calcul itératif de la même relation pour les indices 0 à 16 et plusieurs couples de conditions initiales. Ce contrôle numérique complète la récurrence qui en démontre la validité.

1.d) Puisque $p^* = 2$ et $2 = -\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{5}{2}$, soustrayons cette identité à 1.b).
Pour $n \geq 2$:

$$v_n = p_n - 2 = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2}.$$

Ainsi (v_n) est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2, de conditions initiales $v_0 = p_0 - 2$ et $v_1 = p_1 - 2$.

1.e) L'équation caractéristique réelle est $r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$, ou $4r^2 + 2r - 1 = 0$. Son discriminant vaut $2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 > 0$. Ses deux racines distinctes sont :

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

1.f) Le résultat du cours sur les récurrences d'ordre 2 à deux racines réelles distinctes donne $v_n = Ar_1^n + Br_2^n$. Les conditions initiales imposent $A + B = p_0 - p^*$ et $r_1A + r_2B = p_1 - p^*$.

En soustrayant r_2 fois la première égalité à la seconde :

$$A = \frac{p_1 - p^* - r_2(p_0 - p^*)}{r_1 - r_2}.$$

De même :

$$B = \frac{r_1(p_0 - p^*) - (p_1 - p^*)}{r_1 - r_2}.$$

Le dénominateur est non nul, car $r_1 - r_2 = \sqrt{5}/2 > 0$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = p^* + \frac{p_1 - p^* - r_2(p_0 - p^*)}{r_1 - r_2}r_1^n + \frac{r_1(p_0 - p^*) - (p_1 - p^*)}{r_1 - r_2}r_2^n.$$

1.g) Puisque $1 < \sqrt{5} < 3$, on a $0 < r_1 < 1/2$ et $-1 < r_2 < -1/2$. Les deux suites géométriques r_1^n et r_2^n tendent donc vers 0. Les coefficients A et B étant fixés, $p_n \rightarrow p^* = 2$.

Le modèle prévoit un retour au prix d'équilibre ; le terme associé à $r_2 < 0$ peut faire alterner les écarts au voisinage de ce prix. La formule de récurrence est une formule réelle ; l'interprétation économique suppose que les prix et anticipations étudiés restent dans leur domaine positif.

2.a) L'égalité $c\hat{p}_n + d = a - bp_n$ donne, car $b > 0$:

$$p_n = \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}\hat{p}_n.$$

2.b) La règle adaptative s'écrit $\hat{p}_n = (1 - \beta)\hat{p}_{n-1} + \beta p_{n-1}$. En la reportant dans 2.a), puis en utilisant $\frac{c}{b}\hat{p}_{n-1} = \frac{a-d}{b} - p_{n-1}$, on obtient :

$$p_n = \frac{a-d}{b} - (1 - \beta) \left(\frac{a-d}{b} - p_{n-1} \right) - \beta \frac{c}{b} p_{n-1}.$$

Le terme constant vaut $\beta(a-d)/b$; le coefficient de p_{n-1} vaut $(1 - \beta) - \beta c/b = 1 - \beta(b+c)/b$. D'où la récurrence demandée.

2.c) Le prix d'équilibre vérifie $cp^* + d = a - bp^*$; ainsi :

$$p^* = \frac{a-d}{b+c} > 0.$$

Posons $q = 1 - \beta(b+c)/b$. Puisque $(1-q)p^* = \beta(a-d)/b$, la récurrence devient $p_n - p^* = q(p_{n-1} - p^*)$. Par récurrence :

$$p_n = p^* + q^n(p_0 - p^*).$$

Pour $q = 0$, cette formule signifie $p_n = p^*$ dès $n \geq 1$, et p_0 reste la valeur initiale.

2.d) Supposons $p_0 \neq p^*$. Comme $\beta, b, c > 0$, $q < 1$. Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$ et $p_n \rightarrow p^*$.

Si $q = -1$, les termes pairs et impairs valent respectivement p_0 et $2p^* - p_0$, deux valeurs distinctes : la suite ne converge pas. Si $q < -1$, alors $|p_n - p^*| = |q|^n |p_0 - p^*| \rightarrow +\infty$, donc la suite ne converge pas vers un réel.

La convergence équivaut donc à $q > -1$, ce qui se réécrit, en divisant par les quantités strictement positives :

$$1 - \beta \left(1 + \frac{c}{b} \right) > -1 \iff \frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1.$$

Dans ce cas, la limite est p^* . Si l'on retire l'hypothèse $p_0 \neq p^*$, la suite initialisée à l'équilibre est constante quel que soit q .

2.e) Lorsque $c < b$, on a $1 + c/b < 2$ et $0 < \beta < 1$, donc $0 < \beta(1 + c/b) < 2$. Ainsi $-1 < q < 1$: la suite converge vers p^* pour toute initialisation compatible avec le modèle.

Si $0 < q < 1$, les écarts à l'équilibre gardent leur signe et diminuent en valeur absolue. Si

$-1 < q < 0$, leurs signes alternent et leurs valeurs absolues diminuent. Pour $q = 0$, l'équilibre est atteint dès le rang 1 ; pour $p_0 = p^*$, la suite est constante dès l'origine.

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

3.a) La fonction polynomiale h_p est dérivable, avec $h'_p(x) = p - x^2$. Si $p > 0$, la dérivée est positive sur $[0, \sqrt{p}[$, nulle en $\sqrt{p}$, puis négative sur $]\sqrt{p}, +\infty[$. Ainsi :

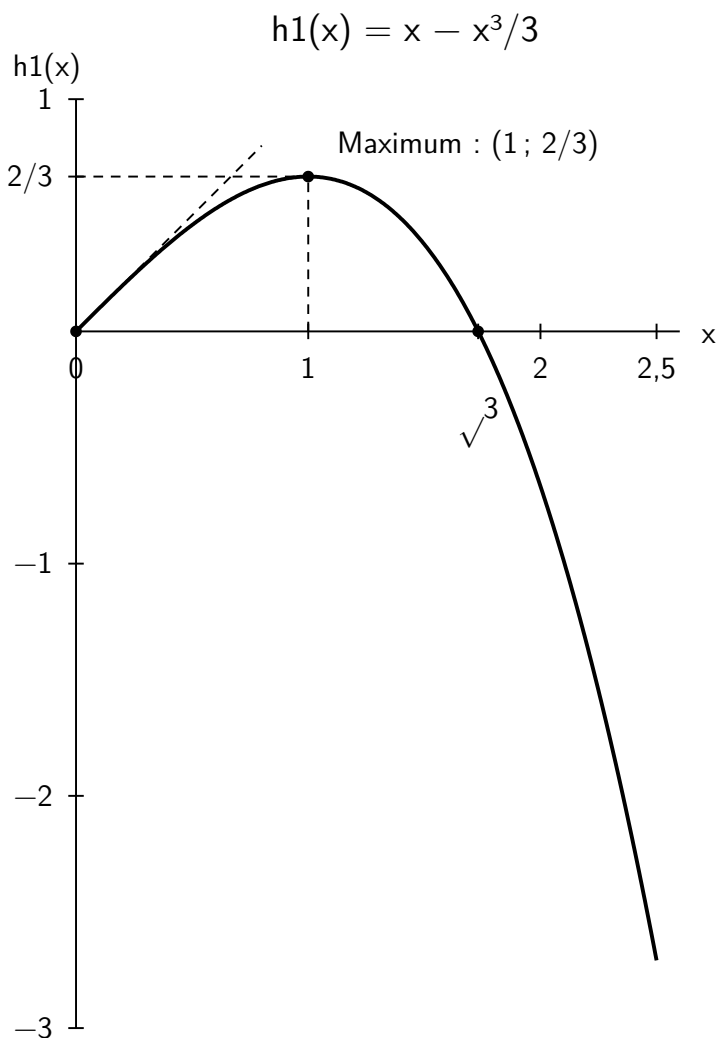
x	0	$\sqrt{p}$	$+\infty$
h'_p	+	0	—
h_p	0	$2p^{3/2}/3$	$-\infty$

La fonction croît jusqu'à $\sqrt{p}$, puis décroît ; son maximum unique vaut $h_p(\sqrt{p}) = \frac{2}{3}p^{3/2}$. Sa limite à droite en 0 vaut 0 et sa limite en $+\infty$ vaut $-\infty$, puisque $h_p(x) = x^3(p/x^2 - 1/3)$.

La factorisation $h_p(x) = x(p - x^2/3)$ donne les deux racines 0 et $\sqrt{3p}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Si $p = 0$, on a $h_0(x) = -x^3/3$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de limite 0 en 0 et $-\infty$ à l'infini. Son unique racine est 0 et son maximum, atteint uniquement en 0, vaut 0 ; la formule $\frac{2}{3}p^{3/2}$ reste donc valable.

3.b) Pour $p = 1$, la courbe passe par $(0, 0)$ et $(\sqrt{3}, 0)$, admet le maximum $(1, 2/3)$ et tend vers $-\infty$. Sa tangente en l'origine a pour équation $y = x$, puisque $h'_1(0) = 1$. Enfin $h''_1(x) = -2x < 0$ pour $x > 0$: elle est concave. Le tracé ci-dessous représente la portion $0 \leq x \leq 2,5$ dans un repère orthonormé ; la branche décroissante se poursuit vers $-\infty$.



Même unité sur les deux axes

4.a) La fonction F' est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; comme $F'(0) = 0$, on a $F'(x) > 0$ pour $x > 0$.

Pour établir sa limite sans dériver l'équivalent de F , utilisons la convexité de F , conséquence de $F'' \geq 0$. Sa courbe est au-dessus de sa tangente en $x > 0$; en évaluant cette tangente en 0 :

$$F(0) \geq F(x) - xF'(x).$$

Ainsi $F'(x) \geq F(x)/x$. Or $F(x)/x \sim sx^{r-1} \rightarrow +\infty$, car $s > 0$ et $r > 1$. Il en résulte $F'(x) \rightarrow +\infty$.

Le théorème de la bijection s'applique donc à la fonction continue et strictement croissante F' : elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Sa réciproque S est

définie sur $\mathbb{R}_+$, continue, strictement croissante, et vérifie :

$$S(0) = 0, \quad F'(S(p)) = p, \quad S(F'(x)) = x.$$

Pour $p > 0$, on a $S(p) > 0$.

4.b) On a $\Pi_p''(x) = -F''(x) < 0$ pour $x > 0$, donc Π_p est concave. Plus précisément, $\Pi_p'(x) = p - F'(x)$ et F' est strictement croissante.

Pour $p > 0$, la dérivée est positive lorsque $0 \leq x < S(p)$, nulle en $S(p)$ et négative pour $x > S(p)$. Le profit atteint donc son unique maximum au point $S(p)$.

Pour $p = 0$, la dérivée vaut $-F'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$; le maximum unique est atteint en $0 = S(0)$. Enfin, pour tout $p \geq 0$, $\Pi_p(x)/x = p - F(x)/x \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, ce qui confirme la décroissance finale vers $-\infty$.

5.a) Le point maximisant est $S(p)$, donc :

$$M(p) = pS(p) - F(S(p)).$$

En particulier, $M(0) = 0$. Comme $x = 0$ est un choix possible dans le maximum et $\Pi_p(0) = 0$, on a $M(p) \geq 0$ pour tout $p \geq 0$.

5.b) Méthode 1 — Comparer deux profits maximaux

Cette méthode utilise seulement la continuité de S et évite de supposer connue une formule de dérivation de réciproque.

Pour $p, q \geq 0$, le choix de production $S(p)$ est admissible au prix q . Ainsi :

$$M(q) \geq qS(p) - F(S(p)) = M(p) + (q - p)S(p).$$

En échangeant p et q , on obtient également :

$$M(q) \leq M(p) + (q - p)S(q).$$

Pour $q > p$, ces deux inégalités donnent :

$$S(p) \leq \frac{M(q) - M(p)}{q - p} \leq S(q).$$

Pour $q < p$, le quotient est compris entre $S(q)$ et $S(p)$, les sens s'inversant lors de la division par $q - p < 0$. Lorsque $q \rightarrow p$, la continuité de S impose dans les deux cas que

ce quotient tend vers $S(p)$. Ainsi M est dérivable en tout $p > 0$ et $M'(p) = S(p)$.

Au bord $p = 0$, on ne prend que $q > 0 : 0 = S(0) \leq M(q)/q \leq S(q) \rightarrow 0$. La dérivée à droite existe et vaut $0 = S(0)$.

Méthode 2 — Dériver la formule explicite du maximum

Fixons $p > 0$. Pour $q \neq p$, la stricte monotonie de S assure $S(q) \neq S(p)$, et :

$$\frac{S(q) - S(p)}{q - p} = \left(\frac{F'(S(q)) - F'(S(p))}{S(q) - S(p)} \right)^{-1}.$$

Par continuité de S et dérivabilité de F' , le quotient entre parenthèses tend vers $F''(S(p)) > 0$. On a donc démontré directement, dans ce cas particulier :

$$S'(p) = \frac{1}{F''(S(p))}.$$

La dérivation de 5.a), par produit et composition, donne alors :

$$M'(p) = S(p) + pS'(p) - F'(S(p))S'(p) = S(p).$$

Pour $p = 0$, la formule précédente sur S' n'est pas utilisée : $F''(0)$ pourrait être nul. On reprend $0 \leq M(q)/q \leq S(q) \rightarrow 0$, qui donne la dérivée à droite.

Les deux méthodes aboutissent à $M' = S$ sur $\mathbb{R}_+$, avec la convention à droite en 0. La première explique la variation du profit en comparant des décisions de production ; la seconde exploite la régularité de l'offre pour les calculs différentiels.

5.c) Puisque $M' = S \geq 0$, M est croissante, et même strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: pour $p > 0$, $S(p) > 0$.

Pour la convexité jusque sur le bord 0, on peut utiliser directement le maximum. Soient $p, q \geq 0$ et $t \in [0, 1]$. Posons $z = tp + (1 - t)q$ et $x = S(z)$. Alors :

$$M(z) = zx - F(x) = t(px - F(x)) + (1 - t)(qx - F(x)) \leq tM(p) + (1 - t)M(q).$$

C'est exactement l'inégalité de convexité sur $\mathbb{R}_+$. Elle inclut les cas $t = 0$, $t = 1$ et les prix nuls. Sur $]0, +\infty[$, on retrouve ce résultat par $M''(p) = S'(p) = 1/F''(S(p)) > 0$.

6.a) Le choix de production $S(y)$ est admissible au prix $p^{(i)}$. Par définition du maximum :

$$M(p^{(i)}) \geq p^{(i)}S(y) - F(S(y)).$$

Soustrayons $M(y) = yS(y) - F(S(y))$ et utilisons $M'(y) = S(y)$:

$$M(p^{(i)}) - M(y) \geq M'(y)(p^{(i)} - y).$$

Il s'agit aussi de l'inégalité de la tangente pour la fonction convexe M , avec une preuve directe qui reste valable pour $y = 0$.

6.b) Les variables p et $M(p)$ prennent un nombre fini de valeurs ; leurs espérances existent. Posons $\alpha_i = P(p = p^{(i)})$, après regroupement d'éventuelles répétitions dans la liste. On a $\alpha_i \geq 0$ et

$$\sum_i \alpha_i = 1.$$

Multiplions l'inégalité de 6.a) par α_i et additionnons. Le théorème du transfert dans le cas fini donne :

$$E(M(p)) - M(y) \geq M'(y) \left(\sum_i \alpha_i p^{(i)} - y \right) = M'(y)(E(p) - y).$$

On obtient donc l'inégalité demandée pour tout $y \geq 0$.

6.c) Comme $p \geq 0$, son espérance est dans $\mathbb{R}_+$. On peut prendre $y = E(p)$ dans 6.b) ; le terme multiplié par $M'(y)$ s'annule, d'où :

$$E(M(p)) \geq M(E(p)).$$

Dans ce modèle, le profit moyen obtenu en adaptant la production au prix aléatoire est au moins celui obtenu face au prix fixé à sa moyenne. Cette conclusion utilise le profit maximal M et les hypothèses de coût du problème.

7. Puisque $M(x) \geq 0$, l'intégrale supposée convergente est absolument convergente. La continuité de M permet d'appliquer le transfert : $M(p)$ admet une espérance égale à cette intégrale.

Pour justifier l'espérance de p avant de l'utiliser, appliquons l'inégalité de 6.a), prouvée pour tout prix réel positif, au point de tangence $y = 1$:

$$M(x) \geq M(1) + S(1)(x - 1).$$

On sait $S(1) > 0$. En réarrangeant, puis en majorant le terme constant par sa valeur absolue :

$$0 \leq x \leq \frac{M(x)}{S(1)} + \left| 1 - \frac{M(1)}{S(1)} \right|.$$

Après multiplication par $f(x) \geq 0$ et intégration sur $[0, A]$, l'intégrale de droite est majorée indépendamment de A , puisque $\int_0^{+\infty} M(x)f(x) dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1. \text{ Par comparaison d'intégrales positives, } \int_0^{+\infty} xf(x) dx \text{ converge.}$$

Ainsi p admet une espérance finie, par transfert, et $E(p) \geq 0$.

Fixons maintenant $y = E(p)$. Pour tout $x \geq 0$, l'inégalité de tangente donne $M(x) \geq M(y) + M'(y)(x - y)$. Tous les termes sont intégrables : $M(p)$ et p viennent d'être justifiés, et les constantes sont intégrables contre la densité f . En intégrant d'abord sur un segment puis en passant aux limites des intégrales convergentes :

$$E(M(p)) \geq M(y) + M'(y)(E(p) - y) = M(E(p)).$$

Aucun échange de limite et d'intégrale n'est nécessaire ; les passages à la limite sont ceux qui définissent les intégrales généralisées.

Partie III. Espérance conditionnelle dans le cas fini

Toutes les variables considérées ici sont finies, donc admettent une espérance. La notation conditionnelle est celle de la somme donnée dans le sujet ; ses propriétés sont établies ci-dessous à partir des probabilités conditionnelles, sans supposer un chapitre général sur l'espérance conditionnelle.

- 8.a) Si X et Y sont indépendantes, $P_{[X=x_i]}(Y = y_j) = P(Y = y_j)$ puisque $P(X = x_i) > 0$.

Par conséquent :

$$\varphi(x_i) = \sum_j y_j P(Y = y_j) = E(Y).$$

La fonction φ est constante sur le support de X , donc $E(Y | X)$ est la variable constante égale à $E(Y)$.

8.b) Sous la condition $X = x_i$, la variable X prend la valeur x_i avec probabilité 1 et les autres valeurs avec probabilité 0. Sa moyenne conditionnelle vaut donc x_i . Ainsi :

$$E(X | X) = X.$$

8.c) Les valeurs de φ sont supposées deux à deux distinctes. L'égalité $\varphi(X) = \varphi(x_i)$ équivaut alors à $X = x_i$. Par conséquent :

$$P(E(Y | X) = \varphi(x_i)) = P(X = x_i).$$

Ces probabilités décrivent la loi de la variable finie $E(Y | X)$. Sans l'hypothèse de distinction, il faudrait additionner les probabilités des différentes valeurs de X donnant la même image.

8.d) La formule de transfert s'applique à $\varphi(X)$, que les images de φ soient distinctes ou non :

$$E(E(Y | X)) = \sum_i \varphi(x_i) P(X = x_i).$$

En remplaçant $\varphi(x_i)$ par sa définition et en utilisant la formule des probabilités composées :

$$E(E(Y | X)) = \sum_i \sum_j y_j P_{[X=x_i]}(Y = y_j) P(X = x_i) = \sum_j y_j \sum_i P(X = x_i, Y = y_j).$$

Les sommes sont finies. Les événements $[X = x_i]$ forment un système complet; la somme intérieure vaut donc $P(Y = y_j)$. On obtient :

$$E(E(Y | X)) = \sum_j y_j P(Y = y_j) = E(Y).$$

8.e) Fixons une valeur x_i de X . Sous cette condition, $\lambda Y + \rho X + \mu$ prend les valeurs $\lambda y_j + \rho x_i + \mu$. S'il y a des valeurs égales, la somme ci-dessous regroupe automatiquement leurs probabilités; elle reste valable lorsque $\lambda = 0$.

Sa moyenne conditionnelle est :

$$\sum_j (\lambda y_j + \rho x_i + \mu) P_{[X=x_i]}(Y = y_j) = \lambda \varphi(x_i) + (\rho x_i + \mu) \sum_j P_{[X=x_i]}(Y = y_j).$$

La somme des probabilités conditionnelles vaut 1, donc cette moyenne est $\lambda \varphi(x_i) + \rho x_i + \mu$. En composant avec X :

$$E(\lambda Y + \rho X + \mu | X) = \lambda E(Y | X) + \rho X + \mu.$$

Cette identité a été démontrée dans le seul cadre fini nécessaire à la suite.

Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

Question adaptée au programme actuel. Le modèle de cette partie est rectifié : les supports finis des prix peuvent dépendre de l'instant; seuls leurs espérances et leurs variances sont supposées identiques. Ces deux moments et les indépendances données suffisent à toutes les questions 9 à 11. L'égalité des lois sur un même support fini, imposée dans l'original, est incompatible avec un bruit indépendant non constant lorsque $\theta \neq 0$; la justification est précisée dans le relevé final.

9.a) Toutes les variables ont un support fini, donc leurs espérances et leurs variances existent. Notons μ l'espérance commune des prix et v leur variance commune.

Par linéarité de l'espérance dans (1), $\mu = \theta\mu + (1 - \theta)p^*$, puisque $E(u_n) = 0$. Or $1 - \theta > 0$, donc :

$$\mu = p^*.$$

Par indépendance de u_n et p_{n-1} , la variance de leur somme est la somme des variances : $v = \theta^2 v + \sigma^2$. Comme $1 - \theta^2 > 0$:

$$v = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2} > 0.$$

Ces égalités valent également pour p_0 , puisque ses deux moments sont les mêmes. La relation $p_0 = \ell u_0 + m$ donne $E(p_0) = m$ et $V(p_0) = \ell^2 \sigma^2$. Il vient :

$$m = p^*, \quad \ell^2 = \frac{1}{1 - \theta^2}, \quad \ell = \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}} \text{ ou } \ell = -\frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}}.$$

Les deux signes sont les solutions de la contrainte de variance : l'énoncé ne suppose pas ℓ positif. Dans un modèle donné, le choix doit aussi respecter les prix non négatifs supposés. Réciproquement, ces choix et la relation de récurrence préservent par récurrence les moments $E(p_n) = p^*$ et $V(p_n) = \sigma^2/(1 - \theta^2)$, sous les indépendances données.

9.b) Les moments d'ordre 2 existent et l'indépendance implique $\text{Cov}(u_n, p_{n-1}) = 0$. La bilinéarité de la covariance appliquée à (1) donne :

$$\text{Cov}(p_n, p_{n-1}) = \theta V(p_{n-1}) = \frac{\theta \sigma^2}{1 - \theta^2}.$$

Les deux variances valent le nombre strictement positif v , donc leur coefficient de corrélation linéaire est :

$$\rho(p_n, p_{n-1}) = \frac{\theta v}{\sqrt{v}\sqrt{v}} = \theta.$$

Le paramètre θ mesure ainsi la corrélation entre deux prix successifs. En particulier, pour $\theta = 0$, ils sont non corrélés ; dans le modèle donné, (1) fournit alors $p_n = p^* + u_n$, indépendant de p_{n-1} .

10. Les variables u_n et p_{n-1} sont finies et indépendantes. La question 8.a) donne $E(u_n | p_{n-1}) = E(u_n) = 0$. Appliquons ensuite l'identité de 8.e) à (1), avec

$$X = p_{n-1} \text{ et } Y = u_n :$$

$$E(p_n | p_{n-1}) = \theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^*.$$

Ce résultat est une fonction affine du prix observé à l'instant précédent. Chaque condition sur une valeur du support de p_{n-1} a une probabilité strictement positive, conformément à la définition de la partie III.

11.a) Puisque $\hat{p}_n = p_{n-1}$, la question 8.b) donne $E(\hat{p}_n | p_{n-1}) = p_{n-1}$. D'après 9.a) :

$$E(\hat{p}_n) = p^*, \quad V(\hat{p}_n) = v = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}.$$

Les prix successifs ayant la même espérance, $E(e_n) = E(p_n) - E(p_{n-1}) = 0$.

Méthode 1 — Utiliser le bruit indépendant

Soustrayons p_{n-1} à (1) :

$$e_n = (\theta - 1)(p_{n-1} - p^*) + u_n.$$

Les deux termes sont indépendants ; les constantes n'affectent pas la variance. On obtient :

$$V(e_n) = (1 - \theta)^2 v + \sigma^2 = \sigma^2 \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta} + 1 \right) = \frac{2\sigma^2}{1 + \theta}.$$

Le dénominateur est strictement positif car $\theta > -1$.

Méthode 2 — Utiliser la covariance des prix

La formule de variance d'une différence et 9.b) donnent :

$$V(p_n - p_{n-1}) = v + v - 2 \text{Cov}(p_n, p_{n-1}) = 2(1 - \theta)v = \frac{2\sigma^2}{1 + \theta}.$$

La première méthode isole le bruit imprévisible du modèle ; la seconde est utile lorsque les variances et la corrélation des observations sont déjà connues.

11.b) La question 10 donne $\hat{p}_n = \theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^*$. Comme cette expression ne dépend que de p_{n-1} , sa moyenne sous la condition d'une valeur de p_{n-1} est elle-même ; on peut aussi appliquer 8.e) et 8.b) :

$$E(\hat{p}_n | p_{n-1}) = \theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^* = \hat{p}_n.$$

Les formules affines d'espérance et de variance donnent :

$$E(\hat{p}_n) = \theta p^* + (1 - \theta)p^* = p^*, \quad V(\hat{p}_n) = \theta^2 v = \frac{\theta^2 \sigma^2}{1 - \theta^2}.$$

En soustrayant cette anticipation à (1), on obtient exactement $e_n = u_n$. Donc :

$$E(e_n) = 0, \quad V(e_n) = \sigma^2.$$

Pour $\theta = 0$, l'anticipation est la constante p^* , de variance nulle ; les autres formules restent valables.

11.c) Les deux anticipations ont la même espérance p^* et leurs erreurs sont de moyenne nulle. Leurs variances d'erreur sont :

Anticipation	Variance de l'erreur
Naïve	$2\sigma^2/(1 + \theta)$
Rationnelle	σ^2

Puisque $-1 < \theta < 1$, on a $0 < 1 + \theta < 2$, donc $2/(1 + \theta) > 1$. La variance de l'erreur rationnelle est strictement plus petite. Les erreurs étant centrées, leurs espérances des carrés sont leurs variances : la même comparaison vaut pour l'erreur quadratique moyenne.

L'anticipation rationnelle est aussi moins variable : $\theta^2 v < v$, car $v > 0$ et $\theta^2 < 1$. Elle tient compte du retour du prix vers p^* , tandis que l'anticipation naïve reproduit simplement

le dernier prix. Ces comparaisons sont démontrées pour le modèle considéré, sans utiliser un théorème général d'optimalité de l'espérance conditionnelle.

Relevé des adaptations

- Exercice, préambule et question 2 : identification explicite des polynômes à leurs quatre coordonnées, pour rattacher les calculs d'endomorphismes aux matrices d'un espace concret. Les questions et tous leurs résultats à établir sont conservés.
- Problème 1.b) à 2.e) : prolongement affine explicite pour étudier les récurrences comme suites réelles, y compris les cas divergents ; l'interprétation économique reste limitée aux prix non négatifs.
- Problème 1.c) : Code adapté en Python ; la récursion demandée est conservée et son rôle est expliqué localement, sans la supposer connue.
- Problème 3.b) : la courbe demandée dans le corrigé est fournie en SVG inline à partir de la formule exacte $h_1(x) = x - x^3/3$. Le PDF source ne contient aucune figure à retranscrire.
- Problème 5.b) : précision de la dérivée à droite au bord 0 ; aucune division par $F''(0)$ n'est nécessaire. Les deux preuves détaillées restent dans les outils de calcul d'une variable.
- Partie III, préambule, et questions 8 à 11 : la définition finie fournie dans l'original est conservée ; son application aux variables constantes et aux valeurs regroupées est explicitée, notamment pour $\theta = 0$. Toutes les propriétés conditionnelles employées sont établies par des sommes finies en 8.
- Partie IV, préambule, et questions 9 à 11 : remplacement de l'égalité des lois sur un même support fini par l'égalité des espérances et des variances, avec supports finis pouvant dépendre de l'instant. Cette rectification conserve les formules et répare une incompatibilité de l'original. En effet, pour $\theta \neq 0$, si le support du prix

précédent est formé de k valeurs et celui du bruit de $r \geq 2$ valeurs, l'indépendance assure que toutes leurs sommes possibles ont une probabilité positive. En ordonnant les valeurs $a_1 < \dots < a_k$ du prix multiplié par θ et $b_1 < \dots < b_r$ du bruit, les $k + r - 1$ valeurs $a_1 + b_1 < \dots < a_1 + b_r < a_2 + b_r < \dots < a_k + b_r$ sont distinctes. Le support du prix suivant a donc au moins $k + r - 1 > k$ valeurs, ce qui exclut un même support fini. Pour $\theta = 0$, cette contradiction ne se présente pas. Les questions 9 à 11 n'utilisent que les deux premiers moments communs, les indépendances et les lois conditionnelles finies ; aucune identité de lois n'y est requise.