



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2012

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, on pose $g^0 = \text{Id}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\text{Ker } f$ et l'image $\text{Im } f$ de l'endomorphisme f . La matrice M est-elle inversible ?
- 2.a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M .
- 2.b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M .
- 2.c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. À l'aide des résultats de la question 2.c), indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n .
4. On pose $p = \frac{1}{3}(f + \text{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 2\text{Id})$.
 - 4.a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p^n et q^n .
 - 4.b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de n , p et q .
 - 4.c) Déterminer les deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n I + b_n M$.
 - 4.d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Problème

Sous réserve d'existence, on note $E(U)$ et $V(U)$ respectivement l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $p \geq 2$, les variables aléatoires réelles $U_1, \dots, U_p$ sont dites indépendantes lorsque, pour tout p -uplet réel $(u_1, \dots, u_p)$, les événements $[U_1 \leq u_1], \dots, [U_p \leq u_p]$ sont indépendants.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité. Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I. Loi à un paramètre

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- 1.a) Montrer que la fonction f_λ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 1.b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites en 0^+ et en $+\infty$.
- 1.c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 1.d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
- 2.a) Vérifier que $x \mapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2.b) Vérifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$ et calculer sa valeur. Pour traiter la borne 0, calculer d'abord $\int_\varepsilon^R f_\lambda(x) dx$ avec $0 < \varepsilon < R$, puis faire tendre

séparément ε vers 0^+ et R vers $+\infty$.

2.c) Soit Z de loi exponentielle de paramètre λ . Montrer que, pour tout réel x ,

$$P(Z^2 \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{\lambda}(t) dt,$$
l'intégrale à la borne 0 étant comprise au sens de la limite précédente. On note $\mathcal{L}_{\lambda}$ la loi de Z^2 .

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs strictement positives, de loi $\mathcal{L}_{\lambda}$. On note F_{λ} sa fonction de répartition et on pose $Y = \lambda\sqrt{X}$.

3.a) Calculer, pour tout réel x , $F_{\lambda}(x)$.

3.b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

3.c) Établir, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $E(Y^r)$.

3.d) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r)$.

3.e) En déduire, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $E(Y^r)$ et $E(X^r)$. En particulier, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .
 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant
 $n^2 a_n \rightarrow 1$ et $n^2 b_n \rightarrow 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$ et $J_n = (M_n - b_n)/a_n$. On admet que ces expressions définissent des variables aléatoires.

Montrer que (J_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi. On raisonnera directement sur les fonctions de répartition, en distinguant les cas $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$.

Partie II. Estimation ponctuelle de λ

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X définie à la question 3.

On rappelle $Y = \lambda\sqrt{X}$ et on pose, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$,

$$S_k = \sum_{j=1}^k Y_j.$$

On note g_k une densité de S_k .

On admet que les $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes et que, pour $1 \leq k < n$, S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.

On admet uniquement pour ces sommes de variables exponentielles la relation suivante : $g_1(x) = e^{-x}$ si $x > 0$, $g_1(x) = 0$ si $x \leq 0$, et, pour tout $k \geq 1$,

$$g_{k+1}(x) = \begin{cases} \int_0^x g_k(t) e^{-(x-t)} dt & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

5.a) En utilisant les propriétés admises, montrer que $g_2(x) = xe^{-x}$ si $x > 0$ et $g_2(x) = 0$ si $x \leq 0$.

5.b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1} e^{-x}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

5.c) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1/S_n$ est une variable aléatoire à densité. Pour quelles valeurs de n son espérance et sa variance existent-elles ? Calculer leurs valeurs lorsqu'elles existent. Pour les éventuelles divergences en 0, utiliser $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$ sur $]0, 1]$ et calculer explicitement les intégrales de $1/x$ et $1/x^2$ entre ε et 1.

6. On note $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$. Le

paramètre λ est inconnu. On considère le critère H défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$H(\lambda) = \ln \left(\prod_{k=1}^n f_{\lambda}(x_k) \right).$$

Montrer que H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 , dont on donnera la valeur.

7. Pour tout $n \geq 3$, on pose

$$\lambda_n^* = n / \sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}.$$

Un estimateur T_n de λ est dit sans biais si $E(T_n) = \lambda$. Son risque quadratique est, lorsqu'il existe, $\rho(T_n) = E[(T_n - \lambda)^2]$.

7.a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

7.b) Construire à partir de λ_n^* un estimateur sans biais $\hat{\lambda}_n$ de λ et calculer son risque quadratique $\rho(\hat{\lambda}_n)$.

7.c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\hat{\lambda}_n)$. Commenter.

Partie III. Loi à deux paramètres

8. Soient λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda, \alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{(\lambda, \alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^{\alpha}) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

8.a) Montrer que $\int_0^{+\infty} f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx$ converge et vaut 1. Calculer d'abord l'intégrale sur $[\varepsilon, R]$, avec $0 < \varepsilon < R$, à l'aide de la primitive $x \mapsto -\exp(-\lambda x^\alpha)$.

Soit E une variable de loi exponentielle de paramètre 1. On définit la loi $WB(\lambda, \alpha)$ comme celle de $(E/\lambda)^{1/\alpha}$. Soit W une variable strictement positive de cette loi ; on note $F_{(\lambda, \alpha)}$ sa fonction de répartition.

8.b) Calculer, pour tout réel x , $F_{(\lambda, \alpha)}(x)$.

8.c) Montrer que $F_{(\lambda, \alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

8.d) Écrire une fonction Python d'en-tête `def W(lambd, alpha):` permettant de simuler W .

On pourra utiliser `numpy.random.random()` qui renvoie un tirage uniforme dans $[0, 1[$ et `numpy.log(u)` qui calcule $\ln(u)$ pour $u > 0$. Le tirage nul peut être renouvelé avant d'appliquer le logarithme.

9. Soit K une variable aléatoire strictement positive, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K sa fonction de répartition et on pose, pour tout réel x , $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$.

9.a) On suppose que K suit la loi $WB(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$. Établir les propriétés suivantes.

9.a.i) La fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

9.a.ii) La variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $WB(1/(4\lambda), 2)$.

9.b) Réciproquement, on suppose que r vérifie les deux propriétés précédentes. Montrer que K suit la loi $WB(\lambda, 2)$. Conclusion ?

Dans les questions 10 et 11, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \dots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

10. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^n w_k^x \ln w_k}{\sum_{k=1}^n w_k^x} - \frac{1}{x}.$$

10.a) Soient $y_1, \dots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \dots, z_n$ des réels quelconques. En étudiant la fonction polynomiale du second degré

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n (z_k - ty_k)^2,$$

établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^n y_k z_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n z_k^2 \right).$$

10.b) Montrer que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

10.c) On note n_0 le nombre d'indices $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $w_{k_0} = \max_{1 \leq k \leq n} w_k$. Montrer que $1 \leq n_0 \leq n - 1$.

10.d) Donner un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n w_k^x$$

en fonction de n_0 et de w_{k_0} lorsque $x \rightarrow +\infty$.

10.e) Calculer, en fonction de w_{k_0} , la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. On distinguera les cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$.

10.f) En déduire que, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln w_k$$

admet une unique solution.

11. On note $(W_1, \dots, W_n)$ un n -échantillon de variables indépendantes de loi $\text{WB}(\lambda, \alpha)$, dont une réalisation est $(w_1, \dots, w_n)$. Les paramètres λ et α sont inconnus. On considère la fonction G sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de $\mathbb{R}^2$:

$$G(\lambda, \alpha) = \ln \left(\prod_{k=1}^n f_{(\lambda, \alpha)}(w_k) \right).$$

11.a) Montrer que G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

11.b) Montrer que G admet un maximum local en $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$. Calculer sa hessienne et étudier les signes de ses valeurs propres sans calcul de déterminant ni de polynôme caractéristique.