



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2012

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1. Pour déterminer le noyau, écrivons $M(x, y, z)^t = 0$. Les trois équations sont

$my + z = 0$, $m^2x + z = 0$ et $mx + y = 0$. Les deux dernières donnent $y = -mx$ et $z = -m^2x$. La première donne alors $-2m^2x = 0$. Comme $m > 0$, on a $x = y = z = 0$.

Ainsi $\text{Ker } f = \{0\}$. Par le théorème du rang dans $\mathbb{R}^3$, $\dim \text{Im } f = 3$, donc $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$. La matrice M est inversible.

2.a) Le produit matriciel donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = 2I + M.$$

Par exemple, le coefficient $(1, 1)$ vaut $(1/m)m + (1/m^2)m^2 = 2$, et le coefficient $(1, 2)$ vaut $(1/m^2)m = 1/m$; les autres coefficients se calculent de la même manière.

2.b) L'égalité précédente s'écrit $M^2 - M - 2I = 0$. Le polynôme non nul

$P(t) = t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1)$ est donc annulateur de M . On peut aussi déduire de cette identité $M(M - I)/2 = I$, ce qui retrouve l'inversibilité de la question 1 avec $M^{-1} = (M - I)/2$.

2.c) Toute valeur propre de M est racine du polynôme annulateur P , donc appartient à $\{2, -1\}$. Déterminons les espaces propres directement.

Pour $MX = 2X$, la première équation donne $z = 2m^2x - my$. En remplaçant dans la deuxième, $mx + z/m = 2y$, il vient $3mx - y = 2y$, donc $y = mx$, puis $z = m^2x$. La troisième équation est alors satisfaite. Réciproquement, le vecteur $u = (1, m, m^2)^t$ vérifie $Mu = 2u$. Ainsi :

$$E_2 = \text{Vect}(u).$$

La matrice $M + I$ a ses trois lignes proportionnelles. L'équation $(M + I)X = 0$ équivaut

à $x + y/m + z/m^2 = 0$. On peut donc écrire :

$$E_{-1} = \text{Vect}(v_1, v_2), \quad v_1 = (1, -m, 0)^t, \quad v_2 = (1, 0, -m^2)^t.$$

Les vecteurs v_1, v_2 sont libres, puisque leurs deuxième et troisième coordonnées permettent d'annuler séparément leurs coefficients. Les familles propres associées à deux valeurs propres distinctes se concatènent en une famille libre. La famille (u, v_1, v_2) est donc une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres : M est diagonalisable et son spectre est exactement $\{2, -1\}$.

3. Soit P la matrice de colonnes u, v_1, v_2 , qui est inversible d'après la question 2.c), et $D = \text{diag}(2, -1, -1)$. On a $M = PDP^{-1}$, puis $M^n = PD^nP^{-1}$ et $D^n = \text{diag}(2^n, (-1)^n, (-1)^n)$. Cette méthode fournit l'expression cherchée sans effectuer ici les produits, conformément à la consigne.

4.a) On dispose de $f^2 = f + 2\text{Id}$. Les applications p, q sont des combinaisons de f et de l'identité, donc commutent. On calcule :

$$p \circ q = \frac{1}{9}(f + \text{Id})(2\text{Id} - f) = \frac{1}{9}(f + 2\text{Id} - f^2) = 0.$$

Le même produit dans l'autre ordre donne $q \circ p = 0$. D'autre part :

$$p^2 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \text{Id}) = \frac{1}{3}(f + \text{Id}) = p,$$

$$q^2 = \frac{1}{9}(4\text{Id} - 4f + f^2) = \frac{1}{3}(2\text{Id} - f) = q.$$

Par récurrence, $p^n = p$ et $q^n = q$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n = 0$, la définition impose en revanche $p^0 = q^0 = \text{Id}$.

4.b) On vérifie $p + q = \text{Id}$ et $f = 2p - q$.

Méthode 1 — Récurrence avec les produits nuls

Pour $n = 0$, $2^0 p + (-1)^0 q = p + q = \text{Id} = f^0$. Si $f^n = 2^n p + (-1)^n q$, alors :

$$f^{n+1} = (2^n p + (-1)^n q)(2p - q) = 2^{n+1} p + (-1)^{n+1} q,$$

car $p^2 = p$, $q^2 = q$ et les produits croisés sont nuls. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = 2^n p + (-1)^n q.$$

Méthode 2 — Action sur les deux espaces propres

Tout vecteur X se décompose de manière unique en $X = X_2 + X_{-1}$, avec $X_2 \in E_2$ et $X_{-1} \in E_{-1}$, car la base propre a été établie en 2.c). Les formules de p, q donnent $p(X) = X_2$ et $q(X) = X_{-1}$. L'itération de f multiplie ces composantes par 2^n et $(-1)^n$; on retrouve donc $f^n(X) = 2^n p(X) + (-1)^n q(X)$, y compris pour $n = 0$.

La première méthode exploite le calcul des compositions ; la seconde explique le rôle des deux composantes propres sans théorie abstraite de décomposition supplémentaire.

4.c) En remplaçant p et q par leurs expressions, on obtient :

$$f^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \text{Id} + \frac{2^n - (-1)^n}{3} f.$$

Dans la base canonique :

$$M^n = a_n I + b_n M, \quad a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \quad b_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Ces coefficients sont uniques : si $aI + bM = 0$, le coefficient $(1, 2)$ impose $b/m = 0$, donc $b = 0$, puis $a = 0$. En particulier $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

4.d) Oui. L'inversibilité de f a été établie en 1. Comme $p + q = \text{Id}$ et les produits croisés sont nuls, on a $(2p - q)(p/2 - q) = \text{Id}$; ainsi $f^{-1} = p/2 - q$. Pour tout $k \geq 1$, la récurrence précédente donne $(f^{-1})^k = 2^{-k} p + (-1)^k q$. Si $n = -k$, cela s'écrit $f^n = 2^n p + (-1)^n q$, puisque $(-1)^{-k} = (-1)^k$. Les mêmes formules pour a_n, b_n sont donc valables pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Problème

Partie I. Loi à un paramètre

1.a) Sur l'ouvert $]0, +\infty[$, les fonctions racine carrée, inverse et exponentielle sont de classe C^∞ , et les dénominateurs sont non nuls. Leurs produits et compositions montrent que f_λ est de classe C^∞ , donc C^2 , sur cet intervalle.

1.b) En dérivant le produit définissant f_λ , on obtient :

$$f'_\lambda(x) = -\frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{4x^{3/2}}(1 + \lambda\sqrt{x}).$$

Chaque facteur à droite, hormis le signe moins, est strictement positif pour $x > 0$. La fonction est donc strictement décroissante. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, l'exponentielle tend vers 1 et $\lambda/(2\sqrt{x}) \rightarrow +\infty$, donc $f_\lambda(x) \rightarrow +\infty$. À l'infini, l'exponentielle tend vers 0 et le facteur $1/\sqrt{x}$ aussi; ainsi $f_\lambda(x) \rightarrow 0$.

x	0^+		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$		—	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	décroît	0

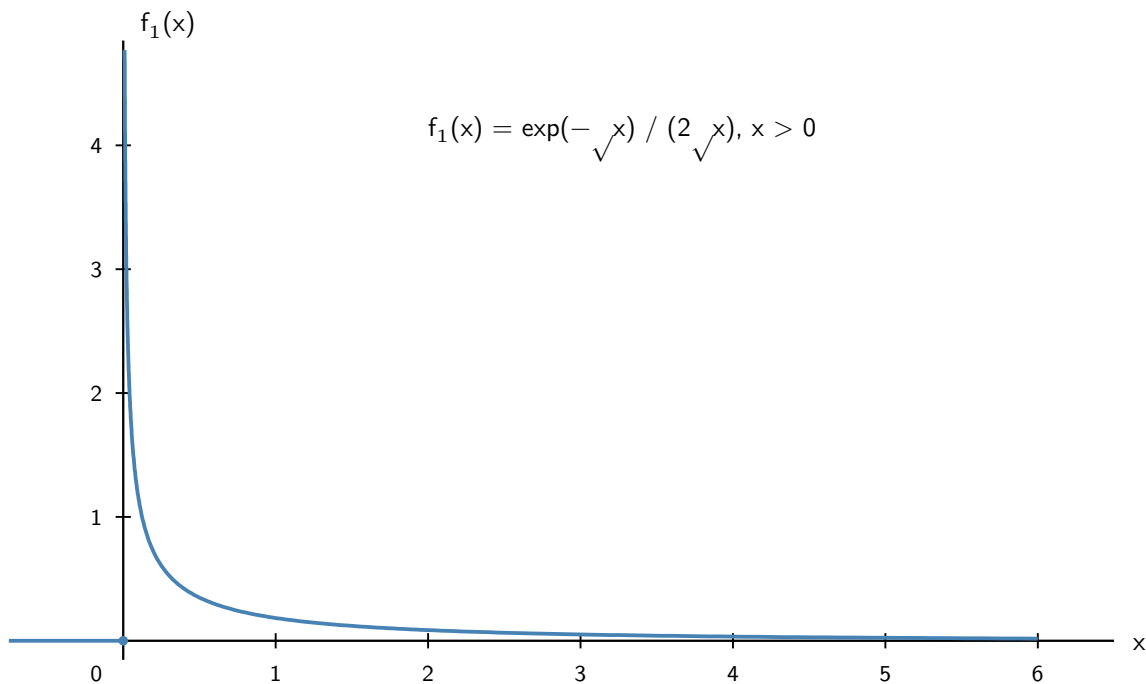
1.c) Une seconde dérivation donne :

$$f''_\lambda(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{8x^{5/2}}(3 + 3\lambda\sqrt{x} + \lambda^2 x).$$

Pour obtenir cette formule, on peut écrire $f'_\lambda = -\frac{\lambda}{4}e^{-\lambda\sqrt{x}}(x^{-3/2} + \lambda x^{-1})$, dériver les deux facteurs, puis regrouper les termes selon les puissances de x . Tous les facteurs de l'expression finale sont strictement positifs. La fonction f_λ est donc strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

1.d) Pour $\lambda = 1$, la courbe est située dans le demi-plan supérieur, décroît strictement et est convexe. Elle admet l'axe vertical comme asymptote à droite de 0 et l'axe horizontal comme asymptote à l'infini. Elle passe notamment par $(1, e^{-1}/2)$ et $(4, e^{-2}/4)$. Comme $f_1 = 0$ sur $] -\infty, 0]$, son graphe contient aussi cette demi-droite et le point $(0, 0)$; il est

discontinu en 0.



2.a) Pour $x > 0$, la règle de dérivation des fonctions composées donne :

$$\frac{d}{dx} (-e^{-\lambda\sqrt{x}}) = e^{-\lambda\sqrt{x}} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} = f_{\lambda}(x).$$

La fonction proposée est donc bien une primitive sur $]0, +\infty[$.

2.b) Question adaptée au programme actuel : la borne singulière est traitée par le calcul indiqué sur un segment. Pour $0 < \varepsilon < R$, la question 2.a) donne :

$$\int_{\varepsilon}^R f_{\lambda}(x) dx = e^{-\lambda\sqrt{\varepsilon}} - e^{-\lambda\sqrt{R}}.$$

À R fixé, la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ existe et vaut $1 - e^{-\lambda\sqrt{R}}$. Puis $e^{-\lambda\sqrt{R}} \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale converge donc, et $\int_0^{+\infty} f_{\lambda}(x) dx = 1$.

2.c) Question adaptée au programme actuel. La fonction f_{λ} est positive et intégrable, mais sa limite en 0^+ est infinie : on ne l'utilise donc pas comme densité dans le cadre restreint du programme. La loi étudiée est définie par transformation d'une exponentielle.

Comme $Z > 0$ presque sûrement, $P(Z^2 \leq x) = 0$ si $x \leq 0$. Si $x > 0$, la croissance de la racine carrée donne :

$$P(Z^2 \leq x) = P(Z \leq \sqrt{x}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}.$$

Cette dernière valeur est $\int_0^x f_\lambda(t) dt$, d'après le calcul précédent. La fonction est continue en 0, croissante et de limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$; la construction avec Z garantit effectivement l'existence de la loi $\mathcal{L}_\lambda$.

3.a) D'après la définition de la loi $\mathcal{L}_\lambda$, on a, pour tout réel x :

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En particulier F_λ est continue sur $\mathbb{R}$, y compris en 0.

3.b) Si $y < 0$, $P(Y \leq y) = 0$. Pour $y \geq 0$, puisque $\lambda > 0$ et $X > 0$:

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y^2/\lambda^2) = 1 - e^{-y}.$$

C'est la fonction de répartition d'une exponentielle de paramètre 1. Ainsi $Y \sim \mathcal{E}(1)$, et on dispose de l'identité exacte $X = (Y/\lambda)^2$.

3.c) On applique le théorème de transfert à l'exponentielle Y , dont la densité e^{-y} pour $y > 0$ possède des limites latérales finies en tout réel. Pour $r \geq 1$, il faut étudier

$\int_0^{+\infty} y^r e^{-y} dy$. L'intégrande se prolonge continûment par 0 en 0. À l'infini, $y^r e^{-y/2} \rightarrow 0$ par croissance comparée ; il existe donc $A > 0$ tel que $0 \leq y^r e^{-y} \leq e^{-y/2}$ pour $y \geq A$. L'intégrale de comparaison converge. Le moment $E(Y^r)$ existe donc pour tout entier $r \geq 1$.

3.d) Sur un segment $[0, R]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^R y^{r+1} e^{-y} dy = -R^{r+1} e^{-R} + (r+1) \int_0^R y^r e^{-y} dy.$$

Le terme de bord en 0 est nul. Le terme $R^{r+1} e^{-R}$ tend vers 0 par croissance comparée. Les intégrales convergent d'après 3.c), donc le passage à la limite est justifié et fournit

$$E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r).$$

3.e) La loi exponentielle donne $E(Y) = 1$. La récurrence précédente entraîne $E(Y^r) = r!$ pour tout $r \geq 1$. Puis $X^r = Y^{2r}/\lambda^{2r}$; ce moment est intégrable par 3.c), et :

$$E(X^r) = \frac{(2r)!}{\lambda^{2r}}.$$

En particulier $E(X) = 2/\lambda^2$ et $E(X^2) = 24/\lambda^4$. La formule de Koenig-Huygens donne alors $V(X) = 24/\lambda^4 - 4/\lambda^4 = 20/\lambda^4$. Ces calculs utilisent exclusivement le transfert appliqué à Y , sans extension du cours sur les densités singulières.

4. Question adaptée au programme actuel : on utilise les fonctions de répartition et on ne qualifie pas les variables de variables à densité dans le cadre restreint du programme. L'indépendance des X_k donne, pour tout $t \geq 0$:

$$P(M_n > t) = \prod_{k=1}^n P(X_k > t) = e^{-n\lambda\sqrt{t}}.$$

La fonction de répartition de M_n vaut donc 0 pour $t \leq 0$ et $1 - e^{-n\lambda\sqrt{t}}$ pour $t > 0$.

Comme $a_n > 0$, $P(J_n \leq x) = P(M_n \leq a_n x + b_n)$.

Si $x > 0$, alors $a_n x + b_n > 0$ et $n\sqrt{a_n x + b_n} = \sqrt{n^2 a_n x + n^2 b_n} \rightarrow \sqrt{x}$. Ainsi $P(J_n \leq x) \rightarrow 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$.

Si $x = 0$, $P(J_n \leq 0) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{n^2 b_n}} \rightarrow 0$.

Si $x < 0$, la quantité $n^2 a_n x + n^2 b_n$ tend vers le réel strictement négatif x . Elle est donc négative pour tout n assez grand; alors $a_n x + b_n < 0$ et $P(J_n \leq x) = 0$.

Dans les trois cas, la limite est $F_\lambda(x)$, fonction continue sur tout $\mathbb{R}$. Par la définition de la convergence en loi, J_n converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{L}_\lambda$, c'est-à-dire la même loi que X .

Partie II. Estimation ponctuelle de λ

5.a) Résultat admis dans cette version adaptée : pour les seules sommes S_k considérées, $g_{k+1}(x) = \int_0^x g_k(t)e^{-(x-t)} dt$ lorsque $x > 0$, et $g_{k+1}(x) = 0$ lorsque $x \leq 0$. Cette relation particulière remplace l'énoncé général du PDF et permet les calculs des questions 5.a) et 5.b).

Pour $x > 0$, on obtient :

$$g_2(x) = \int_0^x e^{-t} e^{-(x-t)} dt = e^{-x} \int_0^x 1 dt = xe^{-x}.$$

Pour $x \leq 0$, la relation admise impose $g_2(x) = 0$.

5.b) Pour $n = 1$, la formule proposée redonne la densité exponentielle de $S_1 = Y_1$. Supposons la formule vraie au rang $n \geq 1$. Pour $x > 0$, la relation particulière admise donne :

$$g_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} e^{-(x-t)} dt = \frac{e^{-x}}{(n-1)!} \frac{x^n}{n} = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

Pour $x \leq 0$, la densité est nulle. La récurrence est établie pour tout $n \geq 1$. Ces fonctions ont des limites latérales finies en 0 ; leur utilisation comme densités reste dans le cadre du programme. Aucun résultat général sur une famille de lois supplémentaire n'est nécessaire.

5.c) Question adaptée au programme actuel : on examine les singularités en 0 par les calculs indiqués. Comme $S_n > 0$ presque sûrement, les moments se calculent par transfert appliqué à sa densité g_n :

$$E(1/S_n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx,$$

sous réserve de convergence. Pour $n \geq 2$, l'intégrande se prolonge continûment en 0, et le calcul de 3.e), en incluant $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, donne :

$$E(1/S_n) = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1}.$$

Pour $n = 1$, l'intégrale est minorée sur $[\varepsilon, 1]$ par $e^{-1} \int_{\varepsilon}^1 dx/x = -e^{-1} \ln \varepsilon$, qui tend vers $+\infty$. L'espérance n'est donc pas finie.

De même, le second moment est associé à $\int_0^{+\infty} x^{n-3} e^{-x} dx / (n-1)!$. Pour $n \geq 3$, il existe et vaut $(n-3)! / (n-1)! = 1 / [(n-1)(n-2)]$. On en déduit :

$$V(1/S_n) = \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n-1)^2(n-2)}.$$

Pour $n = 2$, le second moment diverge comme l'intégrale de $1/x$ à la borne 0. Pour $n = 1$, l'intégrale de $1/x^2$ diverge également, puisque $\int_{\varepsilon}^1 dx/x^2 = 1/\varepsilon - 1$; l'espérance est déjà non finie. Ainsi l'espérance existe exactement pour $n \geq 2$, et la variance exactement pour $n \geq 3$.

6. Tous les x_k sont strictement positifs; chaque $f_{\lambda}(x_k)$ l'est également, et le logarithme du produit est donc défini. Posons

$$T = \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} > 0$$

et

$$L_x = \sum_{k=1}^n \ln x_k.$$

Alors :

$$H(\lambda) = n \ln \lambda - n \ln 2 - \frac{1}{2} L_x - \lambda T,$$

$$H'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - T.$$

La dérivée est strictement positive pour $0 < \lambda < n/T$, nulle en n/T , puis strictement

négative. Ainsi H atteint son unique maximum en

$$\lambda_0 = n/T = n / \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}.$$

La conclusion découle de l'étude exacte du critère fourni, sans recours à une théorie générale d'estimation.

7.a) Le nombre λ_0 est la réalisation observée de la variable aléatoire λ_n^* lorsque l'échantillon prend la valeur $(x_1, \dots, x_n)$. C'est donc l'estimation fournie par cet estimateur ; il faut distinguer ce nombre observé de l'estimateur aléatoire.

7.b) Question adaptée au programme actuel : les notions de biais et de risque ont été définies dans le sujet. Comme

$$S_n = \lambda \sum_{k=1}^n \sqrt{X_k},$$

on a $\lambda_n^* = n\lambda/S_n$. Pour $n \geq 3$, les deux moments de l'inverse existent d'après 5.c), et :

$$E(\lambda_n^*) = \frac{n\lambda}{n-1}.$$

On corrige ce facteur en posant :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{n-1}{n} \lambda_n^* = \frac{n-1}{\sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}}.$$

Cet estimateur ne contient pas le paramètre inconnu dans son expression observable et vérifie $E(\hat{\lambda}_n) = \lambda$. Il est donc sans biais. En développant le carré,

$\rho(\hat{\lambda}_n) = V(\hat{\lambda}_n) + (E(\hat{\lambda}_n) - \lambda)^2$. Le second terme est nul et, par 5.c) :

$$\rho(\hat{\lambda}_n) = (n-1)^2 \lambda^2 V(1/S_n) = \frac{\lambda^2}{n-2}.$$

7.c) Pour λ fixé, $\rho(\hat{\lambda}_n) = \lambda^2/(n-2) \rightarrow 0$. L'erreur quadratique moyenne tend donc vers 0. On peut préciser cette propriété avec Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|\hat{\lambda}_n - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lambda^2}{(n-2)\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

L'estimation se concentre ainsi autour du vrai paramètre lorsque la taille de l'échantillon augmente. Cette majoration particulière suffit ; aucune règle générale sur les convergences d'estimateurs n'est utilisée.

Partie III. Loi à deux paramètres

8.a) Question adaptée au programme actuel. La fonction est positive et continue sur $]0, +\infty[$. Pour $0 < \varepsilon < R$, la dérivation de $-e^{-\lambda x^\alpha}$ donne $f_{(\lambda, \alpha)}(x)$, donc :

$$\int_{\varepsilon}^R f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx = e^{-\lambda \varepsilon^\alpha} - e^{-\lambda R^\alpha}.$$

Puisque $\alpha, \lambda > 0$, les limites successives en $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $R \rightarrow +\infty$ donnent 1. La normalisation est établie pour tous les paramètres positifs. Pour $\alpha < 1$, la limite de cette fonction en 0^+ est infinie : la loi est donc définie par la transformation explicite de l'exponentielle fournie dans le sujet, plutôt que par l'utilisation d'une densité singulière comme connaissance du cours. Pour $\alpha \geq 1$, les limites latérales sont finies, et la même fonction est aussi une densité conforme au cadre du programme.

8.b) Pour $x \leq 0$, $F_{(\lambda, \alpha)}(x) = 0$. Pour $x > 0$, la croissance stricte de la puissance positive donne :

$$P((E/\lambda)^{1/\alpha} \leq x) = P(E \leq \lambda x^\alpha) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}.$$

Ainsi $F_{(\lambda, \alpha)}(x) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}$ pour $x > 0$. Cette fonction est continue en 0 et sur tout $\mathbb{R}$. Sa dérivée sur $]0, +\infty[$ est bien $f_{(\lambda, \alpha)}$.

8.c) Posons $U = F_{(\lambda, \alpha)}(W)$. Comme $W > 0$, on a $0 < U < 1$ presque sûrement. Pour $0 < u < 1$, la fonction de répartition est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et :

$$P(U \leq u) = P\left(W \leq \left(\frac{-\ln(1-u)}{\lambda}\right)^{1/\alpha}\right) = 1 - \exp(\ln(1-u)) = u.$$

Pour $u \leq 0$, cette probabilité vaut 0 ; pour $u \geq 1$, elle vaut 1. C'est exactement la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

8.d) Code adapté en Python. Si U est uniforme sur $]0, 1[$, alors $-\ln U$ suit l'exponentielle de paramètre 1, car, pour $t \geq 0$, $P(-\ln U \leq t) = P(U \geq e^{-t}) = 1 - e^{-t}$. La transformation définissant la loi donne le code complet suivant :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def W(lambd, alpha):
    u = rd.random()
    while u == 0:
        u = rd.random()
    return (-np.log(u) / lambd) ** (1 / alpha)
```

Les paramètres doivent être strictement positifs. La boucle renouvelle uniquement un éventuel tirage nul, pour que le logarithme soit défini et que le résultat soit positif ; `random()` ne renvoie jamais 1. Dans le modèle uniforme continu, l'événement $U = 0$ est de probabilité nulle, et le renouvellement ne change pas la loi. Le résultat a donc la loi demandée. Cette fonction a été exécutée sur des paramètres positifs ; les essais numériques complètent la justification par la fonction de répartition, sans la remplacer.

9.a.i) Sous la loi $WB(\lambda, 2)$, $F_K(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$ pour $x > 0$, et $F_K(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Il vient $R(x) = \lambda x^2$ pour $x \geq 0$ et $R(x) = 0$ pour $x < 0$. La dérivée en 0 existe et vaut 0, car $R(h)/h$ tend vers 0 des deux côtés. Ainsi $r(x) = 2\lambda x$ sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est continue, strictement croissante puisque $2\lambda > 0$, et $r(0) = 0$.

9.a.ii) Pour $t \geq 0$, la formule précédente donne :

$$P(r(K) \leq t) = P(K \leq t/(2\lambda)) = 1 - e^{-t^2/(4\lambda)}.$$

Pour $t < 0$, la probabilité est nulle. Par la question 8.b), il s'agit de la fonction de répartition de $WB(1/(4\lambda), 2)$.

9.b) Les hypothèses sur f_K garantissent d'abord $F_K(x) < 1$ pour chaque réel x : pour $x \geq 0$, la densité continue est strictement positive sur tout segment contenu dans $]x, +\infty[$, donc la probabilité au-delà de x est positive. Pour $x < 0$, $F_K(x) = 0$. Les logarithmes définissant R sont ainsi licites.

De plus, F_K est C^1 puisque sa densité est continue, et $R' = f_K/(1 - F_K)$. Sur $]0, +\infty[$, f_K est C^1 ; la fonction r y est donc C^1 . Par (i), r est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $r(0) = 0$. Comme $K > 0$ presque sûrement, pour tout $x \geq 0$, les événements $[r(K) \leq r(x)]$ et $[K \leq x]$ sont égaux. La propriété (ii) entraîne :

$$F_K(x) = 1 - \exp\left(-\frac{r(x)^2}{4\lambda}\right),$$

donc $R(x) = r(x)^2/(4\lambda)$. Pour $x > 0$, la stricte croissance impose $r(x) > 0$. En dérivant l'égalité, $r(x) = r(x)r'(x)/(2\lambda)$, d'où $r'(x) = 2\lambda$.

La fonction $r(x) - 2\lambda x$ a une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$; elle est donc constante, par les inégalités des accroissements finis appliquées sur chaque segment de cet intervalle. La continuité en 0 et $r(0) = 0$ donnent $r(x) = 2\lambda x$. Il suit $R(x) = \lambda x^2$, puis $F_K(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$ pour $x \geq 0$. Pour $x < 0$, $F_K(x) = 0$ par positivité de K . Ainsi K suit bien $\text{WB}(\lambda, 2)$.

Les propriétés (i) et (ii) caractérisent donc cette loi parmi les variables satisfaisant les hypothèses de la question 9; le sens direct a été démontré en 9.a), et la réciproque vient d'être établie.

10.a) Posons

$$A = \sum_{k=1}^n y_k^2 > 0,$$

$$B = \sum_{k=1}^n y_k z_k$$

et

$$C = \sum_{k=1}^n z_k^2.$$

Le polynôme proposé s'écrit $Q(t) = At^2 - 2Bt + C$. En complétant le carré :

$$Q(t) = A(t - B/A)^2 + C - B^2/A.$$

Comme Q est une somme de carrés, sa valeur en B/A est positive ou nulle. Ainsi $C - B^2/A \geq 0$, soit $B^2 \leq AC$. C'est précisément l'inégalité demandée, obtenue en étudiant le polynôme imposé par l'énoncé.

10.b) Notons, pour $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^n w_k^x,$$

$$T(x) = \sum_{k=1}^n w_k^x \ln w_k$$

et

$$U(x) = \sum_{k=1}^n w_k^x (\ln w_k)^2.$$

Les w_k sont positifs, donc $S > 0$; ces sommes finies sont dérivables, avec $S' = T$ et $T' = U$. Il vient :

$$\varphi'(x) = \frac{U(x)S(x) - T(x)^2}{S(x)^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Méthode 1 — Inégalité de la question précédente

On applique 10.a) à $y_k = w_k^{x/2}$ et $z_k = w_k^{x/2} \ln w_k$. Les y_k ne sont pas tous nuls; leurs carrés ont pour somme S . Les sommes des $y_k z_k$ et des z_k^2 sont T et U . Ainsi $T^2 \leq SU$, puis $\varphi'(x) \geq 1/x^2 > 0$. La fonction φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Méthode 2 — Somme explicite de différences au carré

En développant les deux produits finis et en regroupant les couples d'indices (i, j) et

(j, i) , on obtient :

$$SU - T^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_i^x w_j^x (\ln w_i - \ln w_j)^2 \geq 0.$$

En effet, les termes diagonaux se compensent, et chaque paire fournit $w_i^x w_j^x [(\ln w_i)^2 + (\ln w_j)^2 - 2 \ln w_i \ln w_j]$. La même formule de la dérivée entraîne encore $\varphi'(x) > 0$. La première méthode réutilise directement 10.a) ; la seconde rend la positivité visible terme par terme.

10.c) Le maximum $M = \max_{1 \leq k \leq n} w_k$ est atteint, car il s'agit d'une liste finie non vide. Donc $n_0 \geq 1$. Si $n_0 = n$, tous les w_k seraient égaux à M , contrairement à l'hypothèse. Par conséquent $1 \leq n_0 \leq n - 1$.

10.d) En isolant les indices pour lesquels $w_k = M$, on écrit :

$$S(x) = M^x \left(n_0 + \sum_{w_k < M} (w_k/M)^x \right).$$

Pour chaque indice de la dernière somme, $0 < w_k/M < 1$, donc $(w_k/M)^x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. La somme est finie ; on a $S(x)/M^x \rightarrow n_0 > 0$. Ainsi $S(x) \sim n_0 M^x = n_0 w_{k_0}^x$.

10.e) Si $M \neq 1$, on a $\ln M \neq 0$ et :

$$\frac{T(x)}{M^x} = n_0 \ln M + \sum_{w_k < M} (w_k/M)^x \ln w_k \rightarrow n_0 \ln M.$$

Comme $S(x)/M^x \rightarrow n_0$, on obtient $T(x)/S(x) \rightarrow \ln M$. Puis $1/x \rightarrow 0$ donne $\varphi(x) \rightarrow \ln M$.

Si $M = 1$, les termes correspondant au maximum ont un logarithme nul. Tous les autres vérifient $0 < w_k < 1$, donc $w_k^x \ln w_k \rightarrow 0$. Ainsi $T(x) \rightarrow 0$, tandis que $S(x) \rightarrow n_0 > 0$; on a encore $\varphi(x) \rightarrow 0 = \ln M$. Cette séparation évite d'utiliser un équivalent dont le coefficient serait nul.

10.f) La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$, car S y est strictement positive. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, chaque $w_k^x \rightarrow 1$; par passage à la limite dans les sommes finies, $T(x)/S(x) \rightarrow c$, où

$$c = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln w_k$$

est un réel fini. Par conséquent $\varphi(x) \rightarrow -\infty$.

À l'autre extrémité, $\varphi(x) \rightarrow \ln M$. Chaque $\ln w_k \leq \ln M$, et au moins une inégalité est stricte puisque les w_k ne sont pas tous égaux. Ainsi $c < \ln M$. Il existe donc a, b avec $0 < a < b$ tels que $\varphi(a) < c < \varphi(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une solution dans $]a, b[$; la stricte croissance démontrée en 10.b) la rend unique dans $]0, +\infty[$.

11.a) L'ensemble $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert, comme indiqué dans le sujet. Les w_k sont strictement positifs; le logarithme définissant G est licite et G est de classe C^∞ sur cet ouvert. Posons

$$L = \sum_{k=1}^n \ln w_k,$$

et utilisons les fonctions S, T, U définies en 10.b), cette fois à l'argument α . On a :

$$G(\lambda, \alpha) = n \ln \lambda + n \ln \alpha + (\alpha - 1)L - \lambda S(\alpha),$$

$$\partial_\lambda G = \frac{n}{\lambda} - S(\alpha), \quad \partial_\alpha G = \frac{n}{\alpha} + L - \lambda T(\alpha).$$

La première équation du gradient nul impose $\lambda = n/S(\alpha) > 0$. Après substitution dans la seconde et division par $n > 0$, il reste $T(\alpha)/S(\alpha) - 1/\alpha = L/n$, c'est-à-dire $\varphi(\alpha) = L/n$. D'après 10.f), cette équation admet une unique solution $\hat{\alpha} > 0$. Elle définit un unique $\hat{\lambda} = n/S(\hat{\alpha}) > 0$. Réciproquement, ce couple annule bien les deux composantes du gradient : c'est l'unique point critique.

11.b) Question adaptée au programme actuel : on étudie la hessienne et les signes de ses valeurs propres sans calcul de déterminant. Pour alléger les formules, les quantités S, T, U de cette question sont évaluées en $\hat{\alpha}$.

Méthode 1 — Hessienne et valeurs propres

Les dérivées secondes donnent :

$$\nabla^2 G(\lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} -n/\lambda^2 & -T(\alpha) \\ -T(\alpha) & -n/\alpha^2 - \lambda U(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique. Au point critique, notons-la A et rappelons $n = \hat{\lambda}S$. Pour tout vecteur réel $(h, k)^t$, on complète un carré :

$$(h, k)A(h, k)^t = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} \left(h + \frac{\hat{\lambda}^2 T}{n} k \right)^2 - \left[\frac{n}{\hat{\alpha}^2} + \hat{\lambda} \left(U - \frac{T^2}{S} \right) \right] k^2.$$

L'inégalité $T^2 \leq SU$, démontrée en 10.b), implique que le coefficient entre crochets est au moins $n/\hat{\alpha}^2 > 0$. Le premier coefficient $n/\hat{\lambda}^2$ est également strictement positif. Si $k \neq 0$, le second terme est strictement négatif ; si $k = 0$ et $h \neq 0$, le premier l'est. Cette forme est donc strictement négative sur tout vecteur non nul.

La matrice symétrique réelle A possède une base de vecteurs propres réels. Si $Av = \mu v$ avec $v \neq 0$, alors $\mu {}^t v v = {}^t v A v < 0$, et $\mu < 0$ puisque ${}^t v v > 0$. Toutes les valeurs propres de la hessienne sont ainsi strictement négatives. La fonction est C^2 sur un ouvert contenant le point critique ; le critère du programme prouve que $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ est un maximum local strict.

Méthode 2 — Maximisation successive des deux variables

Pour $\alpha > 0$ fixé, $\partial_\lambda G = n/\lambda - S(\alpha)$ est positive avant $n/S(\alpha)$ et négative après. Ainsi $G(\lambda, \alpha) \leq G(n/S(\alpha), \alpha)$, avec égalité uniquement pour $\lambda = n/S(\alpha)$.

Notons $B(\alpha) = G(n/S(\alpha), \alpha)$. Son expression explicite est :

$$B(\alpha) = n \ln \left(\frac{n}{S(\alpha)} \right) + n \ln \alpha + (\alpha - 1)L - n.$$

En dérivant directement cette fonction d'une variable, on obtient

$B'(\alpha) = -nT(\alpha)/S(\alpha) + n/\alpha + L = n[L/n - \varphi(\alpha)]$. La stricte croissance de φ et l'égalité $\varphi(\hat{\alpha}) = L/n$ donnent $B' > 0$ avant $\hat{\alpha}$ et $B' < 0$ après. Donc B possède un unique maximum global en $\hat{\alpha}$. En combinant les deux inégalités, G possède même un unique maximum global en $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.

La première méthode répond à la demande par le critère spectral local. La seconde utilise deux études de fonctions d'une variable et fournit en plus une conclusion globale, sans théorème d'optimisation sous contraintes.

Relevé des adaptations

- Partie I, 2.b) : guidage de la borne singulière 0 par le calcul sur $[\varepsilon, R]$ et passage aux limites.
- Partie I, 2.c), préambule de 3 et question 4 : définition de la loi par le carré d'une exponentielle, puis utilisation de sa fonction de répartition. La limite infinie de f_λ en 0^+ empêche de la traiter comme densité dans le cadre restreint du programme. Les résultats numériques et la loi étudiée sont conservés ; les moments sont calculés par transfert de l'exponentielle Y .
- Partie II, préambule et 5.a)–5.b) : la formule générale de convolution admise dans le PDF est remplacée par la seule relation particulière entre les densités de S_k et S_{k+1} , admise et explicitement énoncée. Aucun cours général sur une loi supplémentaire n'est supposé.
- Partie II, 5.c) : guidage des éventuelles divergences à la borne finie 0 par comparaison explicite aux fonctions $1/x$ et $1/x^2$.

- Partie II, 7.b)–7.c) : définitions locales d'un estimateur sans biais et du risque quadratique ; interprétation de la limite par une majoration explicite de Bienaymé-Tchebychev.
- Partie III, 8.a) et préambule de 8.b) : normalisation intégrale conservée et définition de la loi par transformation d'une exponentielle, afin de traiter aussi $0 < \alpha < 1$ sans importer les densités à limite infinie en 0.
- Partie III, 8.d) : Code adapté en Python, avec documentation du tirage uniforme, du logarithme et traitement d'un éventuel tirage nul.
- Partie III, 11 : nature ouverte du domaine précisée ; en 11.b), hessienne et signes des valeurs propres utilisés sans déterminant ni ancien critère d'extremum.