



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2009

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle qu'un élément A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à I s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.

On définit les deux applications suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notées d et t , par : pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ et $t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$.

1. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - a) Calculer $d(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.
 - b) Établir la formule : $d(AB) = d(A)d(B)$.
 - c) En déduire que si A et B sont semblables, on a $d(A) = d(B)$.
2. a) Montrer que t est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la dimension de son image et celle de son noyau.
 - b) Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $t(AB) = t(BA)$.
 - c) En déduire que si A et B sont semblables, on a $t(A) = t(B)$.
3. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I .
 - a) Établir l'existence d'un unique couple (α, β) de réels vérifiant $A^2 = \alpha A + \beta I$.
 - b) Exprimer α et β en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.
4. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I . On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose $w = e_1 + e_2$.

a) Montrer que les trois vecteurs e_1 , e_2 et w ne peuvent être simultanément vecteurs propres de u .

b) En déduire qu'il existe au moins un élément non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que la matrice M associée à u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$,

où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, u(x))$, que l'on exprimera en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.

d) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

5. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$.

a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(A)$; on discutera selon que A est ou n'est pas colinéaire à I .

Problème

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, a et b , avec $a > b$, désignent les deux solutions de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$.

2. a) Montrer que $b = 1 - a = -1/a$. Établir $1 < a < 2$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (a^n - b^n)/\sqrt{5}$.

c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Exprimer β_n en fonction de n et de b .

4. On rappelle que, pour tout réel x , sa partie entière $\lfloor x \rfloor$ vérifie $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n} .

5. Soient y un réel fixé tel que $|y| < 1$ et $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} n^k y^n$$

est absolument convergente.

b) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} n^k u_n / 2^{n+1}.$$

- c) En utilisant la définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n / 2^{n+1}.$$

Partie II. Algèbre et algorithmique

6. Soit

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) La matrice A est-elle inversible? Est-elle diagonalisable?
- b) Calculer A^2 et A^3 . Vérifier que A^3 est une combinaison linéaire de A et A^2 .
- c) Déterminer les valeurs propres de A .
- d) Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $A^n = a_n A + b_n A^2$.
- e) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n . Montrer que ces deux suites vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
7. On propose la fonction Python suivante, où n est un entier supérieur ou égal à 1. Les quatre expressions à compléter sont signalées par des points de suspension.

Python

```
def f(n):
    u = 0
    v = 1
    for k in range(1, n):
        temp = ...
        v = ...
        u = ...
    return ...
```

Compléter cette fonction aux quatre places signalées de façon que la valeur renvoyée soit u_n .

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z -décomposition s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_r}$, où, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $k_i \geq 2$ est entier et, pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$ lorsque $r \geq 2$, $k_{i+1} - k_i \geq 2$.

a) Montrer que les entiers 37 et 272 admettent une Z -décomposition.

b) Soit n un entier admettant une Z -décomposition $n = u_{k_1} + \dots + u_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r , que $n < u_{k_r+1}$. En déduire l'unicité de r .

c) Montrer que, pour tout entier $p \geq 2$, tout entier n tel que $1 \leq n \leq u_p$ admet une unique Z -décomposition; on pourra faire une récurrence sur p .

9. On fixe $p = 20$. On dispose d'une liste Python u de longueur $p + 1$ telle que, pour $2 \leq k \leq p$, $u[k]$ contient u_k ; les cases d'indices 0 et 1 ne seront pas utilisées. On donne n tel que $1 \leq n \leq u_p$.

Écrire une fonction Python $Z(n, u, p)$ qui renvoie une liste Res de longueur $p + 1$ telle que, pour $2 \leq k \leq p$, $Res[k]$ vaut u_k si k est l'un des indices $k_1, \dots, k_r$ de la Z -décomposition de n , et 0 sinon. Les cases d'indices 0 et 1 de Res valent 0. Expliquer et justifier l'algorithme utilisé.

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne contenant des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p , avec $0 < p < 1$, et celle de tirer une boule numérotée 0 est $q = 1 - p$. Les résultats des différents tirages sont indépendants.

On suppose cette expérience modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, lors de deux tirages consécutifs.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on définit S_i : «le i -ième tirage donne une boule numérotée 1», et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.

Si au moins un événement B_i se réalise, on note Y l'indice du premier événement B_i réalisé. Sinon, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire. Ainsi le nombre de tirages jusqu'à la première paire, lorsqu'elle existe, est $Y + 1$.

Par exemple, si le résultat de l'expérience est 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, ..., alors $Y = 6$.

10. a) Calculer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(B_i)$.

b) Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n : «lors des n premiers tirages, il n'apparaît jamais deux fois de suite une boule numérotée 1». On pose $C_0 = \Omega$.

a) Calculer $P(C_0)$, $P(C_1)$ et $P(C_2)$.

b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n + 2) = p^2 q P(C_n)$.

12. a) En considérant les résultats possibles des deux premiers tirages, montrer, pour tout $n \geq 2$, $P(C_n) = qP(C_{n-1}) + pqP(C_{n-2})$.

b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $P(Y = n + 2)$, $P(Y = n + 1)$ et $P(Y = n)$.

13. On suppose dans cette question $p = q = 1/2$.

a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = u_n/2^{n+1}$.

b) Que vaut $P(Y = 0)$?

c) On note $E(Y)$ l'espérance de Y . Montrer que $E(Y) = 5$.

d) Calculer la variance $V(Y)$.

14. On revient au cas général : $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

a) Montrer que l'équation $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux racines distinctes, notées r et s , avec $r > s$.

b) Établir $-1 < s < 0 < r < 1$ et $r > |s|$.

c) On pose $\Delta = q^2 + 4pq$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n)$.

d) Calculer $P(Y = 0)$.

e) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

15. a) Montrer, pour tout réel x tel que $|x| < 1/r$, la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} P(Y = n)x^n.$$

On pose alors

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n)x^n.$$

b) Établir, pour $|x| < 1/r$, $g(x) = \frac{p^2 x}{1 - qx - pqx^2}$.

16. On suppose dans cette question $p = 2/3$.

a) Étudier les variations de g sur $I =] - 3/2, 3/2[$.

b) Montrer l'existence d'un unique $\alpha \in] - 1/2, 0[$ tel que g soit concave sur $] - 3/2, \alpha[$ et convexe sur $] \alpha, 3/2[$.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g sur I , dans un repère orthonormé.