



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques — Option économique

2009

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

On utilise uniquement les définitions de d et t données dans l'énoncé. Leurs propriétés nécessaires sont établies ci-dessous par calcul sur les coefficients.

1. a) Les coefficients diagonaux de $2I$ valent 2 et les autres sont nuls. Donc $d(2I) = 4$, tandis que $d(I) = 1$. Une application linéaire vérifierait $d(2I) = 2d(I) = 2$. Cette contradiction prouve que d n'est pas linéaire.

b) Écrivons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

En développant les deux produits,

$$d(AB) = aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg.$$

Les termes $aecf - afce$ et $bgdh - bhdg$ s'annulent. Les autres donnent $ad(eh - fg) - bc(eh - fg) = (ad - bc)(eh - fg)$. Ainsi $d(AB) = d(A)d(B)$.

- c) Si $B = P^{-1}AP$, avec P inversible, la question précédente donne

$$1 = d(I) = d(P^{-1})d(P). \text{ Par conséquent } d(B) = d(P^{-1})d(A)d(P) = d(A).$$

2. a) Pour tous A, B et tous réels λ, μ , l'addition des coefficients diagonaux donne $t(\lambda A + \mu B) = \lambda t(A) + \mu t(B)$. L'application est donc linéaire. Chaque réel z est

l'image de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: son image est $\mathbb{R}$, de dimension 1. Le théorème du rang,

appliqué au domaine de dimension 4, donne $\dim \text{Ker } t = 4 - 1 = 3$.

On peut aussi décrire directement le noyau : il est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$; les

trois paramètres indépendants confirment sa dimension.

- b)** Avec les coefficients de la question 1.b), $t(AB) = ae + bg + cf + dh$, tandis que $t(BA) = ea + fc + gb + hd$. Ces deux nombres sont égaux par commutativité du produit réel.
- c)** Pour $B = P^{-1}AP$, on applique 2.b) aux matrices $P^{-1}A$ et P :
 $t(B) = t(PP^{-1}A) = t(A)$.

- 3. a)** Écrivons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le produit explicite donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = (a + d)A + (bc - ad)I.$$

Cela établit l'existence d'un couple. Pour l'unicité, si $\alpha A + \beta I = \alpha' A + \beta' I$ et $\alpha \neq \alpha'$, alors $A = -(\beta - \beta')I/(\alpha - \alpha')$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\alpha = \alpha'$, puis $\beta = \beta'$ puisque $I \neq 0$.

- b)** La formule calculée en 3.a) donne $\alpha = t(A)$ et $\beta = -d(A)$. En particulier, l'identité concrète est $A^2 = t(A)A - d(A)I$.

- 4. a)** Si $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = \mu e_2$, la linéarité impose $u(w) = \lambda e_1 + \mu e_2$. Si w est aussi propre, $u(w) = \nu(e_1 + e_2)$, et l'unicité des coordonnées donne $\lambda = \mu = \nu$. Il en résulte $A = \nu I$, contradiction. Les trois vecteurs ne sont donc pas simultanément propres.

- b)** D'après 4.a), au moins un des vecteurs non nuls e_1, e_2, w n'est pas propre. Appelons-le x . Si $(x, u(x))$ était liée, $u(x)$ serait colinéaire à x , ce qui ferait de x un vecteur propre, y compris pour la valeur propre 0 si $u(x) = 0$. La famille est donc libre et comporte deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$: c'est une base.

- c) La première colonne de la matrice dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'identité de 3.b), appliquée au vecteur colonne x , donne $u^2(x) = -d(A)x + t(A)u(x)$. La seconde colonne est donc $\begin{pmatrix} -d(A) \\ t(A) \end{pmatrix}$, et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $a = -d(A)$ et $b = t(A)$ ne dépendent que de A , pas du choix de la base construite.

- d) La transposée de A n'est pas scalaire, car sa transposée le serait alors aussi. Par définition, $d({}^tA) = d(A)$ et $t({}^tA) = t(A)$. En appliquant 4.b)-c) à chacune des deux matrices, on obtient la même matrice M . Ainsi A et ${}^tA$ sont chacune semblables à M , donc semblables entre elles.

5. a) La matrice nulle commute avec A . Si $AB = BA$ et $AC = CA$, alors $A(\lambda B + \mu C) = \lambda BA + \mu CA = (\lambda B + \mu C)A$ pour tous réels λ, μ . L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel.

- b) Si $A = \lambda I$, toute matrice commute avec A , donc $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sa base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base et sa dimension vaut 4; E_{ij} désigne la matrice dont seul le coefficient (i, j) vaut 1.

Supposons A non scalaire. Choisissons une colonne non nulle x telle que (x, Ax) soit une base, conformément à 4.b). Pour $B \in \mathcal{C}(A)$, écrivons $Bx = \mu x + \nu Ax$. La commutation donne

$$B(Ax) = A(Bx) = \mu Ax + \nu A^2x.$$

Les matrices B et $\mu I + \nu A$ ont donc la même action sur les deux colonnes d'une base; elles sont égales. Réciproquement, toute matrice $\mu I + \nu A$ commute avec A . Ainsi $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I, A)$. La famille (I, A) est libre puisque A n'est pas scalaire. C'est donc une

base et $\dim \mathcal{C}(A) = 2$.

Problème

Partie I. Analyse

1. a) Les deux termes initiaux sont des entiers naturels et la somme de deux entiers naturels reste dans $\mathbb{N}$; une récurrence à deux termes donne $u_n \in \mathbb{N}$. De plus $u_1 - u_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \geq 0$. La suite est croissante. On a aussi $u_n \geq 1$ pour $n \geq 1$.

b) Méthode 1 — Limite éventuelle.

Si la suite convergait vers un réel ℓ , sa relation de récurrence donnerait $\ell = 2\ell$, donc $\ell = 0$. Or $u_n \geq 1$ pour $n \geq 1$, contradiction. Comme elle est croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

Méthode 2 — Minoration explicite.

Pour $n \geq 2$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \geq u_n + 1$. Comme $u_2 = 1$, une récurrence donne $u_n \geq n - 1$ pour $n \geq 2$. Cette minoration prouve directement $u_n \rightarrow +\infty$. La première méthode exploite la récurrence à la limite; la seconde fournit aussi une borne utile.

2. a) Les racines sont $a = (1 + \sqrt{5})/2$ et $b = (1 - \sqrt{5})/2$. Leur somme vaut 1 et leur produit -1 , donc $b = 1 - a = -1/a$. L'inégalité $1 < \sqrt{5} < 3$ donne $1 < a < 2$. En particulier $-1 < b < 0$ et $|b| < 1 < a$.

b) Méthode 1 — Récurrence linéaire.

La relation $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$ a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$, à deux racines réelles distinctes a, b . Son expression générale est donc $u_n = Ca^n + Db^n$. Les conditions $C + D = 0$ et $Ca + Db = 1$ donnent $C = 1/(a - b) = 1/\sqrt{5}$ et $D = -1/\sqrt{5}$.

Méthode 2 — Vérification directe.

Posons $v_n = (a^n - b^n)/\sqrt{5}$. On a $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. Les égalités $a^2 = a + 1$ et $b^2 = b + 1$ entraînent $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$. Une récurrence à deux termes assure $v_n = u_n$ pour tout n . Cette vérification permet de réutiliser la formule sans résoudre de système général.

- c) On écrit $u_n = \frac{a^n}{\sqrt{5}}(1 - (b/a)^n)$. Puisque $|b/a| < 1$, le facteur entre parenthèses tend vers 1. Donc $u_n \sim a^n/\sqrt{5}$.

3. Méthode 1 — Relation entre deux termes successifs.

Pour $n \geq 0$,

$$\beta_{n+1} = u_{n+2} - au_{n+1} = (1-a)u_{n+1} + u_n = b(u_{n+1} - au_n) = b\beta_n,$$

puisque $-ab = 1$. Avec $\beta_0 = 1$, il vient $\beta_n = b^n$.

Méthode 2 — Expression explicite.

La formule de 2.b) donne $u_{n+1} - au_n = (-b^{n+1} + ab^n)/\sqrt{5} = b^n(a-b)/\sqrt{5} = b^n$.

L'approche récurrente évite la formule explicite; la seconde en constitue une application immédiate.

4. a) Si $n \geq 1$, on a $0 < b^{2n} < 1$ et $au_{2n} = u_{2n+1} - b^{2n}$. Ce réel est strictement compris entre les entiers $u_{2n+1} - 1$ et u_{2n+1} , d'où la partie entière annoncée. Pour $n = 0$, $\lfloor au_0 \rfloor = 0 = u_1 - 1$, ce qui traite le cas où $b^{2n} = 1$.
- b) Pour $n \geq 1$, $-1 < b^{2n-1} < 0$. Ainsi $au_{2n-1} = u_{2n} - b^{2n-1}$ appartient à $]u_{2n}, u_{2n} + 1[$. Par conséquent $\lfloor au_{2n-1} \rfloor = u_{2n}$.

5. a) Si $y = 0$, tous les termes sont nuls. Sinon, choisissons z tel que $|y| < z < 1$. Les croissances comparées donnent $n^k(|y|/z)^n \rightarrow 0$: en effet ce produit vaut $n^k e^{-cn}$, avec $c = \ln(z/|y|) > 0$. Il est donc majoré par une constante $C > 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi $n^k |y|^n \leq C z^n$. La série géométrique de droite converge, ce qui prouve la convergence absolue recherchée, sans critère de quotient.

b) La formule de 2.b) donne

$$\frac{n^k u_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} (n^k (a/2)^n - n^k (b/2)^n).$$

On a $|a/2| < 1$ et $|b/2| < 1$. Les deux séries du membre de droite convergent absolument par 5.a). La série demandée converge donc absolument. Elle fournira notamment l'existence des moments de la variable de la question 13.

c) Méthode 1 — Relation de récurrence imposée par l'énoncé.

Posons

$$S = \sum_{n \geq 1} u_n / 2^{n+1},$$

dont la convergence est établie. En isolant les termes $n = 1, 2$, puis en utilisant

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ pour } n \geq 3,$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \sum_{n \geq 3} \frac{u_{n-1}}{2^{n+1}} + \sum_{n \geq 3} \frac{u_{n-2}}{2^{n+1}} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \left(S - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} S.$$

Les décalages sont licites dans des séries convergentes. Ainsi $S = 1/4 + 3S/4$, donc $S = 1$.

Méthode 2 — Formule explicite et sommes géométriques.

La formule de 2.b) et la convergence absolue donnent

$$S = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{a/2}{1-a/2} - \frac{b/2}{1-b/2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{(a-b)/2}{(1-a/2)(1-b/2)}.$$

Le dénominateur vaut $1 - (a+b)/2 + ab/4 = 1/4$ et $a-b = \sqrt{5}$, donc $S = 1$. La première méthode fait apparaître une équation sur la somme; la seconde utilise la décomposition déjà obtenue en deux suites géométriques.

Partie II. Algèbre et algorithmique

6. a) Les première et quatrième colonnes sont égales, donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ avec un vecteur

non nul. La matrice n'est pas inversible. En revanche elle est réelle symétrique; le résultat du programme sur ces matrices assure qu'elle est diagonalisable.

b) Les produits ligne-colonne donnent

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Pour préciser le calcul, les lignes extérieures de A^2 sont la demi-somme des quatre lignes de A , soit $(1, 1/2, 1/2, 1)$; les lignes intérieures sont la demi-somme des première et quatrième lignes de A , soit $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. En multipliant ces lignes par A , on obtient les lignes affichées de A^3 . La comparaison coefficient par coefficient donne $A^3 = A + A^2$.

- c) L'identité précédente montre que toute valeur propre réelle λ vérifie $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0$, donc $\lambda \in \{0, a, b\}$. La valeur 0 est déjà obtenue en 6.a). Pour $\lambda = a$ ou b , le vecteur non nul $v_\lambda = {}^t(\lambda, 1, 1, \lambda)$ vérifie

$$Av_\lambda = {}^t(\lambda + 1, \lambda, \lambda, \lambda + 1) = \lambda v_\lambda,$$

car $\lambda^2 = \lambda + 1$. Les trois valeurs 0, a , b sont donc effectivement propres, et ce sont les seules.

- d) Pour $n = 1$, prenons $a_1 = 1, b_1 = 0$. Si $A^n = a_n A + b_n A^2$, alors

$$A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A^3 = b_n A + (a_n + b_n) A^2.$$

La définition récursive $a_{n+1} = b_n, b_{n+1} = a_n + b_n$ construit donc les suites et prouve la propriété par récurrence. Elles sont même uniques avec cette représentation : si

$cA + dA^2 = 0$, les coefficients $(2, 2)$ puis $(1, 2)$ donnent $d/2 = 0$ puis $c/2 + d/2 = 0$, donc $c = d = 0$.

- e) Les relations sont celles obtenues ci-dessus. Elles donnent

$$a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n+1},$$

$$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = b_n + b_{n+1}.$$

Ainsi chacune des suites vérifie la même récurrence d'ordre 2 que (u_n) . Les conditions initiales sont $(a_1, a_2) = (1, 0)$ et $(b_1, b_2) = (0, 1)$. On peut en particulier écrire $b_n = u_{n-1}$ et $a_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

7. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Python

```
def f(n):
    u = 0
    v = 1
    for k in range(1, n):
        temp = v
        v = u + v
        u = temp
    return v
```

Avant l'itération d'indice k , les variables u et v valent respectivement u_{k-1} et u_k . La sauvegarde `temp` permet de remplacer successivement la paire par $(u_k, u_{k-1} + u_k) = (u_k, u_{k+1})$. À la fin des $n - 1$ itérations, v vaut u_n . Pour $n = 1$, la boucle est vide et la valeur renvoyée est bien 1.

8. a) Les valeurs nécessaires sont $u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21, u_9 = 34, u_{10} = 55, u_{11} = 89, u_{12} = 144, u_{13} = 233$. Ainsi

$$37 = 34 + 3 = u_9 + u_4,$$

$$272 = 233 + 34 + 5 = u_{13} + u_9 + u_5.$$

En rangeant les indices dans l'ordre croissant, leurs écarts sont 5 dans le premier cas, et 4, 4 dans le second. Ce sont donc des Z -décompositions.

b) Pour un terme, $u_{k_1} < u_{k_1+1}$ puisque $k_1 \geq 2$. Supposons l'inégalité établie pour $r - 1$

termes. Alors

$$\sum_{i=1}^{r-1} u_{k_i} < u_{k_{r-1}+1} \leq u_{k_r-1},$$

car $k_{r-1} + 1 \leq k_r - 1$. En ajoutant u_{k_r} , on obtient $n < u_{k_{r-1}+1} + u_{k_r} = u_{k_r+1}$.

Chaque décomposition vérifie aussi $n \geq u_{k_r}$. Or $(u_k)_{k \geq 2}$ est strictement croissante. Il existe donc au plus un indice $k_r \geq 2$ tel que $u_{k_r} \leq n < u_{k_r+1}$: le plus grand indice est imposé par n . Après avoir retranché u_{k_r} , si le reste est nul, la décomposition ne comporte que ce terme ; s'il est positif, son plus grand indice est imposé de la même manière. Les restes entiers diminuent strictement. En répétant, deux décompositions de n ont exactement les mêmes indices et, en particulier, le même nombre r de termes. L'inégalité seule ne donne donc pas directement l'unicité de r : c'est cette extraction successive qui la justifie.

- c) Pour $p = 2$ et $p = 3$, les entiers possibles sont $1 = u_2$ et éventuellement $2 = u_3$, chacun avec une décomposition unique par 8.b). Supposons la propriété acquise jusqu'au rang $p - 1$, avec $p \geq 4$, et prenons $1 \leq n \leq u_p$. Si $n = u_p$, la décomposition à un terme convient. Si $n < u_{p-1}$, l'hypothèse au rang $p - 1$ s'applique. Sinon $u_{p-1} \leq n < u_p$: écrivons $n = u_{p-1} + m$, avec

$$0 \leq m < u_p - u_{p-1} = u_{p-2}.$$

Si $m = 0$, il n'y a qu'un terme. Si $m > 0$, l'hypothèse au rang $p - 2$ fournit sa décomposition ; puisque $m < u_{p-2}$, tous ses indices sont au plus $p - 3$. On peut donc lui ajouter l'indice $p - 1$, avec un écart au moins égal à 2. L'existence est démontrée dans tous les cas. L'unicité résulte de 8.b). La récurrence forte sur p est achevée.

9. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Python

```
def Z(n, u, p):
    Res = [0] * (p + 1)
    reste = n
```

```

k = p
while reste > 0:
    while u[k] > reste:
        k = k - 1
    Res[k] = u[k]
    reste = reste - u[k]
    k = k - 2
return Res

```

On choisit à chaque étape le plus grand terme de Fibonacci qui ne dépasse pas le reste. La question 8.b) montre que ce terme est nécessaire dans toute décomposition. Si ce terme est u_k , la maximalité donne reste avant soustraction $< u_{k+1}$, donc le nouveau reste est strictement inférieur à $u_{k+1} - u_k = u_{k-1}$. Tout indice suivant est donc au plus $k - 2$, ce qui explique la décrémentation. Pour l'étape initiale où $k = p$ et $n = u_p$, le reste devient immédiatement nul ; l'inégalité reste vraie.

Un reste positif est un entier au moins égal à $u_2 = 1$; la boucle intérieure trouve donc toujours un indice au moins égal à 2. Le reste décroît strictement après chaque sélection, ce qui assure la terminaison. Les cases inutilisées restent nulles et les autres contiennent précisément les termes sélectionnés. Le code est exécutable sans import. Les fonctions des questions 7 et 9 ont été exécutées et contrôlées, notamment pour tous les entiers de 1 à u_{20} ; ces contrôles accompagnent les justifications précédentes.

Partie III. Probabilités

On notera $\pi_n = P(Y = n)$ pour $n \geq 1$ et $c_n = P(C_n)$ pour $n \geq 0$. Attention : Y est l'indice du premier tirage de la première paire, et non le nombre total de tirages, qui vaut alors $Y + 1$.

- 10.** a) Les tirages i et $i + 1$ sont indépendants et ont chacun une probabilité p de donner 1. Ainsi $P(B_i) = P(S_i)P(S_{i+1}) = p^2$.
- b)** Toutes les valeurs sont des entiers naturels. La valeur 0 correspond par exemple à une suite ne contenant que des zéros. Pour tout $n \geq 1$, une suite commençant par $n - 1$ zéros puis deux 1 réalise $Y = n$, et ce début de suite a une probabilité

$q^{n-1}p^2 > 0$. Dans le modèle canonique de l'expérience, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

On a $\{Y = 1\} = S_1 \cap S_2$, donc $\pi_1 = p^2$. Pour $Y = 2$, les trois premiers résultats sont nécessairement 0, 1, 1, d'où $\pi_2 = qp^2$. Pour $Y = 3$, les résultats des tirages 2, 3, 4 sont nécessairement 0, 1, 1, le premier tirage étant quelconque. Donc $\pi_3 = qp^2$. Les facteurs proviennent dans chaque cas de tirages distincts et indépendants.

Si l'espace probabilisé choisi omet des suites de probabilité nulle, l'image ensembliste peut ne pas contenir 0; l'ensemble des valeurs positives possibles reste $\mathbb{N}^*$. L'énoncé décrit l'expérience usuelle sur toutes les suites, convention retenue pour la réponse $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

- 11.** a) L'événement C_0 est certain; un seul tirage ne peut former de paire. Donc $c_0 = c_1 = 1$. Pour deux tirages, seule la suite 1, 1 est exclue, ainsi $c_2 = 1 - p^2$.
- b) Pour que la première paire commence au tirage $n + 2$, il faut et il suffit : aucune paire dans les n premiers tirages, un 0 au tirage $n + 1$, puis deux 1 aux tirages $n + 2$ et $n + 3$. Le zéro exclut toute paire franchissant la frontière du bloc initial. Ces conditions portent sur des groupes de tirages disjoints, donc sont indépendantes. On obtient $\pi_{n+2} = c_n qp^2$.
- 12.** a) Si le premier tirage donne 0, la condition concerne seulement les $n - 1$ tirages suivants; la probabilité correspondante est qc_{n-1} . Si le premier donne 1, le deuxième doit donner 0, puis les $n - 2$ suivants doivent éviter toute paire; la probabilité est pqc_{n-2} . Ces deux possibilités sont disjointes et couvrent C_n , d'où $c_n = qc_{n-1} + pqc_{n-2}$, y compris pour $n = 2$ avec $c_0 = 1$.
- b) La formule $\pi_{n+2} = p^2qc_n$ s'étend à $n = 0$, car $\pi_2 = p^2q = p^2qc_0$. Pour $n \geq 2$, la récurrence de c_n donne

$$\pi_{n+2} = q\pi_{n+1} + pq\pi_n.$$

Pour $n = 1$, on vérifie séparément $q\pi_2 + pq\pi_1 = q^2p^2 + p^3q = p^2q(q + p) = p^2q = \pi_3$. La relation est donc valable pour tout $n \geq 1$.

13. a) Pour $p = q = 1/2$, les valeurs initiales sont $\pi_1 = 1/4 = u_1/2^2$ et $\pi_2 = 1/8 = u_2/2^3$.

Si la formule est vraie aux rangs n et $n + 1$, la question 12.b) donne

$$\pi_{n+2} = \frac{1}{2} \frac{u_{n+1}}{2^{n+2}} + \frac{1}{4} \frac{u_n}{2^{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2^{n+3}} = \frac{u_{n+2}}{2^{n+3}}.$$

La récurrence prouve la formule pour tout $n \geq 1$.

b) La question 5.c) donne

$$\sum_{n \geq 1} \pi_n = 1.$$

Les événements $\{Y = n\}$, $n \geq 0$, forment une partition, donc $P(Y = 0) = 0$.

c) La question 5.b), avec $k = 1$, établit la convergence de

$$\sum n \pi_n,$$

donc l'existence de l'espérance $m = E(Y)$.

Méthode 1 — Sommation de la récurrence.

Multiplions la récurrence $\pi_{n+2} = \pi_{n+1}/2 + \pi_n/4$ par $n + 2$, puis sommons pour $n \geq 1$.

Les sommes sont absolument convergentes et

$$\sum \pi_n = 1;$$

ainsi

$$m - \pi_1 - 2\pi_2 = \frac{1}{2}(m + 1 - 2\pi_1) + \frac{1}{4}(m + 2).$$

Avec $\pi_1 = 1/4$ et $\pi_2 = 1/8$, cela devient $m - 1/2 = 3m/4 + 3/4$. Donc $m = 5$.

Méthode 2 — Séries géométriques dérivées.

Posons $\rho = a/2$ et $\sigma = b/2$. Alors $|\rho|, |\sigma| < 1$, $\rho + \sigma = 1/2$, $\rho\sigma = -1/4$ et $\rho - \sigma = \sqrt{5}/2$. La loi s'écrit $\pi_n = (\rho^n - \sigma^n)/(2\sqrt{5})$. La formule usuelle

$$\sum_{n \geq 1} nz^n = z/(1-z)^2,$$

pour $|z| < 1$, donne

$$m = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{\rho}{(1-\rho)^2} - \frac{\sigma}{(1-\sigma)^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{(\rho - \sigma)(1 - \rho\sigma)}{(1-\rho)^2(1-\sigma)^2}.$$

Puisque $(1-\rho)(1-\sigma) = 1/4$, ce nombre vaut $\frac{1}{4} \times \frac{5/4}{1/16} = 5$. La première méthode se réutilise directement pour une loi donnée par récurrence ; la seconde exploite une expression explicite en puissances géométriques.

d) La question 5.b), avec $k = 2$, établit l'existence de $M_2 = E(Y^2)$.

Méthode 1 — Sommation de la récurrence.

En multipliant la même récurrence par $(n+2)^2$ et en sommant,

$$M_2 - \pi_1 - 4\pi_2 = \frac{1}{2}(M_2 + 2m + 1 - 4\pi_1) + \frac{1}{4}(M_2 + 4m + 4).$$

La première somme du membre de droite vient du changement d'indice $j = n + 1$ dans

$$\sum_{n \geq 1} (n+2)^2 \pi_{n+1} = \sum_{j \geq 2} (j+1)^2 \pi_j;$$

on retranche donc le terme $4\pi_1$. En insérant $m = 5$, on obtient $M_2 - 3/4 = 3M_2/4 + 11$, donc $M_2 = 47$. La formule de Koenig-Huygens donne $V(Y) = 47 - 5^2 = 22$.

Méthode 2 — Deux premières séries géométriques dérivées.

On reprend ρ, σ définis en 13.c). Pour $|z| < 1$, l'identité $n^2 = n(n-1) + n$ et les deux formules usuelles donnent

$$\sum_{n \geq 1} n^2 z^n = 2z^2/(1-z)^3 + z/(1-z)^2 = z(1+z)/(1-z)^3.$$

Ainsi

$$M_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^3} - \frac{\sigma(1+\sigma)}{(1-\sigma)^3} \right).$$

Pour détailler la simplification, posons $S = \rho + \sigma = 1/2$ et $T = \rho\sigma = -1/4$. Le numérateur commun se développe en

$$\rho(1+\rho)(1-\sigma)^3 - \sigma(1+\sigma)(1-\rho)^3 = (\rho - \sigma)(1 + S - 6T + ST + T^2).$$

Le facteur entre parenthèses vaut $1 + 1/2 + 3/2 - 1/8 + 1/16 = 47/16$; le dénominateur commun vaut $((1-\rho)(1-\sigma))^3 = 1/64$. Donc $M_2 = \frac{1}{4} \times \frac{47}{16} \times 64 = 47$, puis $V(Y) = 22$. Les deux méthodes correspondent aux deux descriptions de la loi déjà utilisées pour l'espérance.

14. a) Le discriminant vaut $\Delta = q^2 + 4pq > 0$, puisque $p, q > 0$. Les deux racines réelles distinctes sont $r = (q + \sqrt{\Delta})/2$ et $s = (q - \sqrt{\Delta})/2$.

b) Comme $\sqrt{\Delta} > q > 0$, on a $s < 0 < r$. Posons $F(x) = x^2 - qx - pq$. Les valeurs $F(0) = -pq < 0$, $F(1) = 1 - q - pq = p^2 > 0$ et $F(-1) = 1 + q - pq = 1 + q^2 > 0$ placent les racines dans $] -1, 0[$ et $]0, 1[$. Enfin $r + s = q > 0$, d'où $r > -s = |s|$.

c) La récurrence de 12.b) a pour équation caractéristique $F(x) = 0$, à deux racines

réelles distinctes. La suite $v_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n)$ la vérifie. Or $r - s = \sqrt{\Delta}$ et $r + s = q$, donc $v_1 = p^2 = \pi_1$ et $v_2 = p^2 q = \pi_2$. L'unicité d'une suite à récurrence d'ordre 2 et conditions initiales données entraîne $\pi_n = v_n$ pour tout $n \geq 1$.

d) Les deux séries géométriques convergent puisque $|s| < r < 1$. Par conséquent

$$\sum_{n \geq 1} \pi_n = \frac{p^2}{r-s} \left(\frac{r}{1-r} - \frac{s}{1-s} \right) = \frac{p^2}{(1-r)(1-s)}.$$

Or $r + s = q$ et $rs = -pq$, donc $(1-r)(1-s) = 1 - q - pq = p^2$. La somme vaut 1, ce qui donne $P(Y = 0) = 0$.

Une autre preuve probabiliste est possible : si aucune paire de 1 ne survient jamais, aucune des m paires disjointes de tirages $(1, 2), (3, 4), \dots, (2m-1, 2m)$ ne vaut $(1, 1)$. L'indépendance donne $P(Y = 0) \leq (1 - p^2)^m$ pour tout m . Le membre de droite tendant vers 0, on retrouve $P(Y = 0) = 0$ sans calculer la loi.

e) Pour tout entier $k \geq 1$,

$$0 \leq n^k \pi_n \leq \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} (n^k r^n + n^k |s|^n).$$

Les séries de droite convergent par 5.a), donc $E(|Y|^k) < +\infty$. Tous les moments existent. En utilisant la première série géométrique dérivée, avec $|r|, |s| < 1$,

$$E(Y) = \frac{p^2}{r-s} \left(\frac{r}{(1-r)^2} - \frac{s}{(1-s)^2} \right).$$

Le numérateur de la différence mise au même dénominateur est

$$r(1-s)^2 - s(1-r)^2 = (r-s)(1-rs). \text{ Ainsi}$$

$$E(Y) = \frac{p^2(1-rs)}{(1-r)^2(1-s)^2} = \frac{1+pq}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} - 1.$$

Pour $p = 1/2$, cette formule redonne 5. L'espérance du nombre de tirages jusqu'à la paire est donc $E(Y) + 1 = (1+p)/p^2$.

15. a) Si $|x| < 1/r$, alors $|rx| < 1$ et $|sx| \leq r|x| < 1$. La formule de 14.c) donne

$$\sum_{n \geq 1} |\pi_n x^n| \leq \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n \geq 1} (|rx|^n + |sx|^n) < +\infty.$$

La série définissant $g(x)$ est donc absolument convergente sur l'intervalle annoncé.

b) On somme simplement les deux séries géométriques, sans les dériver :

$$g(x) = \frac{p^2}{r-s} \left(\frac{rx}{1-rx} - \frac{sx}{1-sx} \right) = \frac{p^2 x}{(1-rx)(1-sx)} = \frac{p^2 x}{1-qx-pqx^2}.$$

Les dénominateurs sont non nuls car $|rx|, |sx| < 1$.

16. a) Pour $p = 2/3$ et $q = 1/3$, les racines sont $r = 2/3$ et $s = -1/3$. Sur $I =]-3/2, 3/2[$,

$$g(x) = \frac{4x}{D(x)}, \quad D(x) = 9 - 3x - 2x^2 = (3-2x)(x+3) > 0.$$

Cette fonction rationnelle est de classe C^∞ sur I . Sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{4D(x) - 4xD'(x)}{D(x)^2} = \frac{4(9+2x^2)}{D(x)^2} > 0.$$

Donc g est strictement croissante sur I . À gauche, le dénominateur tend vers 9 et le numérateur vers -6 , donc $\lim_{x \rightarrow -3/2^+} g(x) = -2/3$. À droite, $D(x) \rightarrow 0^+$ et $4x \rightarrow 6$, donc

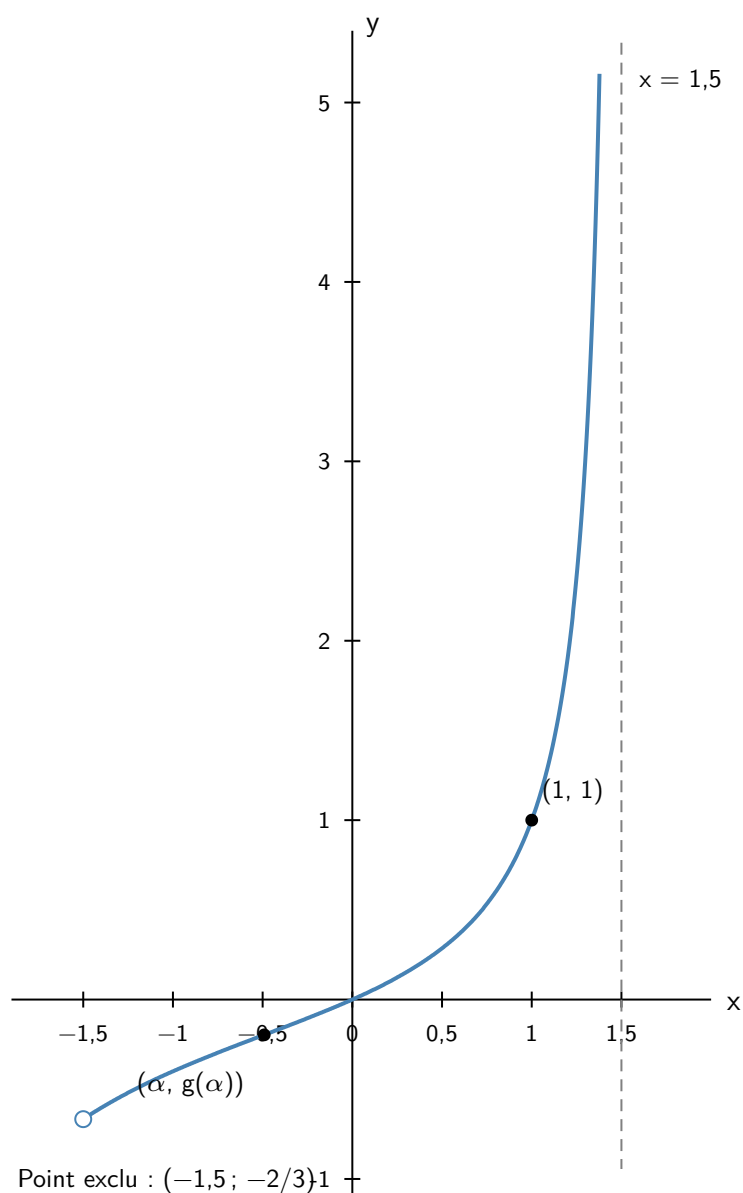
$\lim_{x \rightarrow 3/2^-} g(x) = +\infty$. On a notamment $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

b) La dérivation de la formule précédente donne

$$g''(x) = \frac{16xD(x) - 8(9+2x^2)D'(x)}{D(x)^3} = \frac{8(4x^3 + 54x + 27)}{D(x)^3}.$$

Posons $h(x) = 4x^3 + 54x + 27$. Sa dérivée $h'(x) = 12x^2 + 54$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus $h(-1/2) = -1/2 < 0$ et $h(0) = 27 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance donnent un unique zéro $\alpha \in]-1/2, 0[$. Puisque $D(x) > 0$ sur I , g'' a le signe de h . Ainsi g est concave sur $] -3/2, \alpha[$ et convexe sur $]\alpha, 3/2[$, avec un point d'inflexion d'abscisse α .

- c) La courbe est croissante, passe par $(0, 0)$ et $(1, 1)$, tend vers le point exclu $(-3/2, -2/3)$ à gauche et possède l'asymptote verticale $x = 3/2$ à droite. Sa tangente à l'origine a pour équation $y = (4/9)x$. Le point d'inflexion a pour coordonnées approchées $\alpha \simeq -0,491$ et $g(\alpha) \simeq -0,197$. Le tracé suivant utilise la formule exacte de g ; les deux axes ont la même échelle.



Relevé des adaptations

Problème, 7 : Code adapté en Python; les quatre blancs et la fonction de calcul de u_n sont conservés.

Problème, 9 : Code adapté en Python; le tableau et la procédure sont traduits en liste et fonction, avec une convention d'indices explicite et les mêmes valeurs à produire.