



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2008

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

Les hypothèses de non-constance donnent $\sigma_x^2 > 0$ et $\sigma_y^2 > 0$. On utilisera les identités, obtenues en développant les sommes centrées :

$$\sum_{k=1}^n x_k = n\bar{x}, \quad \sum_{k=1}^n y_k = n\bar{y}, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = n(\sigma_x^2 + \bar{x}^2), \quad \sum_{k=1}^n x_k y_k = n(\text{Cov}(x, y) + \bar{x}\bar{y}).$$

1. Pour chaque indice k , la fonction $(a, b) \mapsto (ax_k + b - y_k)^2$ est polynomiale en a, b , donc de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Leur somme finie f est donc de classe C^2 sur cet ouvert.

2. a) Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 2 \sum_{k=1}^n x_k (ax_k + b - y_k), \quad \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 2 \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k).$$

Le système $\nabla f(a, b) = 0$ s'écrit donc :

$$(S) \quad \begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k + nb = \sum_{k=1}^n y_k. \end{cases}$$

2. b) La seconde équation équivaut à $b = \bar{y} - a\bar{x}$. En substituant cette expression dans la première équation et en utilisant les identités préliminaires :

$$an(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) + n\bar{x}(\bar{y} - a\bar{x}) = n(\text{Cov}(x, y) + \bar{x}\bar{y}),$$

d'où $a\sigma_x^2 = \text{Cov}(x, y)$. Comme $\sigma_x^2 > 0$, le système possède une unique solution :

$$\hat{a} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2}, \quad \hat{b} = \bar{y} - \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \bar{x}.$$

C'est l'unique point critique de f .

2. c) Méthode 1 — Signes des valeurs propres de la hessienne.

La hessienne, indépendante du point où elle est calculée, vaut :

$$H = \nabla^2 f(\hat{a}, \hat{b}) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice H est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit λ une de ses valeurs propres et $(u, v) \neq (0, 0)$ un vecteur propre associé. En multipliant les deux équations de ${}^t(H(u, v)) = \lambda {}^t(u, v)$ respectivement par u et v , puis en additionnant :

$$\lambda(u^2 + v^2) = 2n(\sigma_x^2 u^2 + (\bar{x}u + v)^2).$$

Le membre de droite est strictement positif : s'il était nul, $\sigma_x^2 > 0$ imposerait $u = 0$, puis $v = 0$. Ainsi $\lambda > 0$. Toutes les valeurs propres de H sont strictement positives, sans calcul de déterminant. Le critère hessien, applicable puisque f est C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et $(\hat{a}, \hat{b})$ critique, donne un minimum local strict.

Méthode 2 — Décomposition exacte de la somme des carrés.

Posons $e_k = \hat{a}x_k + \hat{b} - y_k$. Les équations du point critique donnent

$$\sum e_k = 0$$

et

$$\sum x_k e_k = 0.$$

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on développe :

$$f(\hat{a} + u, \hat{b} + v) = \sum_{k=1}^n (e_k + ux_k + v)^2 = f(\hat{a}, \hat{b}) + \sum_{k=1}^n (ux_k + v)^2.$$

Les termes croisés ont disparu grâce aux deux égalités précédentes. La dernière somme vaut $n(\sigma_x^2 u^2 + (u\bar{x} + v)^2)$ et n'est nulle que si $u = v = 0$. Le point critique est donc même l'unique minimum global strict. Cette méthode exploite la structure particulière des moindres carrés ; la première est la méthode hessienne générale attendue.

2. d) Comme $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$, les résidus s'écrivent $\hat{a}(x_k - \bar{x}) - (y_k - \bar{y})$. En développant leur somme de carrés :

$$f(\hat{a}, \hat{b}) = n\hat{a}^2\sigma_x^2 - 2n\hat{a}\text{Cov}(x, y) + n\sigma_y^2.$$

On remplace $\hat{a}$ par $\text{Cov}(x, y)/\sigma_x^2$:

$$f(\hat{a}, \hat{b}) = n\sigma_y^2 - n\frac{\text{Cov}(x, y)^2}{\sigma_x^2} = n\sigma_y^2 \left(1 - \frac{\text{Cov}(x, y)^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right) = n\sigma_y^2 (1 - r(x, y)^2).$$

3. a) La somme de carrés $f(\hat{a}, \hat{b})$ est positive ou nulle. La question précédente et $n\sigma_y^2 > 0$ donnent $1 - r(x, y)^2 \geq 0$, donc $|r(x, y)| \leq 1$.
3. b) Si $|r(x, y)| = 1$, alors $f(\hat{a}, \hat{b}) = 0$. Tous ses termes étant positifs ou nuls, ils sont tous nuls : pour chaque k , $y_k = \hat{a}x_k + \hat{b}$. Les points sont donc alignés sur la droite de régression. Comme les y_k ne sont pas tous égaux, $\hat{a} \neq 0$; la droite n'est ni

horizontale ni verticale. Son coefficient directeur est positif si $r = 1$ et négatif si $r = -1$, puisque $\hat{a} = r\sigma_y/\sigma_x$.

Réciproquement, si les points sont alignés, la non-constance des x_k exclut une droite verticale : il existe a, b tels que $y_k = ax_k + b$. La non-constance des y_k impose $a \neq 0$. Alors $\text{Cov}(x, y) = a\sigma_x^2$ et $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$, d'où $r = a/|a|$ et $|r| = 1$.

Problème

Dans le modèle, les $N - X_n$ individus non contagieux au début du jour sont susceptibles d'être contaminés pendant celui-ci. Les contaminations de ce jour ne créent de nouveaux individus contagieux que le lendemain. L'état 0 est absorbant. Les espérances des variables étudiées en parties I et II existent, car elles prennent un nombre fini de valeurs entre 0 et N .

Question adaptée au programme actuel — Préambule et conditionnements des parties I et II. Le calendrier des catégories est explicité. Les transitions à partir d'états non atteints sont définies par le modèle ; on ne conditionne jamais par un événement de probabilité nulle. Dans les formules des probabilités totales, un tel état contribue par zéro.

Partie I. Un cas particulier

1. Pour déterminer l'inverse sans déterminant, résolvons $RZ = X$ avec

$Z = {}^t(z_1, z_2, z_3, z_4)$ et $X = {}^t(x, y, z, t)$. Les quatre équations sont :

$$z_2 - 6z_3 + z_4 = x, \quad z_1 + 5z_3 = y, \quad -z_1 + z_3 = z, \quad -z_2 = t.$$

Les deux équations centrales donnent $6z_3 = y + z$, puis $z_1 = (y - 5z)/6$. Ainsi :

$$z_1 = \frac{y - 5z}{6}, \quad z_2 = -t, \quad z_3 = \frac{y + z}{6}, \quad z_4 = x + y + z + t.$$

Pour tout X il existe donc une unique solution Z . La matrice R est inversible et :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Notons r_1, r_2, r_3, r_4 les colonnes de R , toutes non nulles. La multiplication directe donne :

$$Sr_1 = {}^t(0, -1, 1, 0) = -r_1, \quad Sr_2 = {}^t(0, 0, 0, 0) = 0r_2,$$

$$Sr_3 = {}^t(-30, 25, 5, 0) = 5r_3, \quad Sr_4 = {}^t(9, 0, 0, 0) = 9r_4.$$

Les réels $-1, 0, 5, 9$ sont donc des valeurs propres de S .

2. b) Les identités précédentes s'assemblent en $SR = RD$, avec :

$$D = \text{diag}(-1, 0, 5, 9).$$

En multipliant à gauche par R^{-1} , on obtient $R^{-1}SR = D$. Les colonnes de R forment bien une base, puisque R est inversible.

2. c) De $S = RDR^{-1}$ on déduit par récurrence $S^n = RD^nR^{-1}$. Pour $n = 0$, cela donne $S^0 = I_4$. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = (-1)^n$, $b_n = 5^n$ et $c_n = 9^n$. Alors :

$$D^n = \text{diag}(a_n, 0, b_n, c_n),$$

et les produits donnent :

$$S^n = \begin{pmatrix} c_n & c_n - b_n & c_n - b_n & c_n \\ 0 & \frac{a_n + 5b_n}{6} & \frac{-5a_n + 5b_n}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-a_n + b_n}{6} & \frac{5a_n + b_n}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

La séparation du cas $n = 0$ évite toute ambiguïté liée à la puissance nulle de la valeur propre 0. Pour vérifier les coefficients, la contribution de r_3 à la première ligne vaut $-b_n(y + z)$, et celle de r_4 vaut $c_n(x + y + z + t)$; les deux autres lignes proviennent des composantes $a_n(y - 5z)/6$ et $b_n(y + z)/6$.

3. a) À partir de l'état 0, personne ne transmet le virus : $X_{n+1} = 0$ avec probabilité 1. La loi de transition est la loi certaine en 0 ; c'est la loi conditionnelle demandée si $P(X_n = 0) > 0$.
3. b) À partir de l'état 3, aucun individu n'est sain pendant le jour et les trois contagieux guérissent pour le lendemain. On a encore $X_{n+1} = 0$ avec probabilité 1. Si $P(X_n = 3) = 0$, il s'agit seulement de la transition prévue par le modèle.
3. c) À partir de l'état 1, deux individus sont sains. Chacun est contaminé avec probabilité $1/3$ et les deux contaminations sont indépendantes. Le nombre de nouveaux contagieux le lendemain suit donc $\mathcal{B}(2, 1/3)$.

À partir de l'état 2, un seul individu est sain. Il échappe aux deux transmissions indépendantes avec probabilité $(2/3)^2 = 4/9$, donc il est contaminé avec probabilité $5/9$. La loi est $\mathcal{B}(1, 5/9)$.

Les lois de transition sont par conséquent :

État de départ	Arrivée 0	Arrivée 1	Arrivée 2	Arrivée 3
0	1	0	0	0
1	4/9	4/9	1/9	0
2	4/9	5/9	0	0
3	1	0	0	0

3. d) Il s'agit ici d'espérances de lois binomiales définies dans la question, sans utiliser un résultat général sur l'espérance conditionnelle. On a :

$$E(X_{n+1}/X_n = 1) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad E(X_{n+1}/X_n = 2) = 1 \times \frac{5}{9} = \frac{5}{9}.$$

4. a) La loi initiale est :

i	0	1	2	3
$P(X_0 = i)$	8/27	12/27	6/27	1/27

La formule des probabilités totales, avec les transitions de la question 3, donne :

$$P(X_1 = 0) = \frac{8}{27} + \frac{4}{9} \frac{12}{27} + \frac{4}{9} \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{17}{27},$$

$$P(X_1 = 1) = \frac{4}{9} \frac{12}{27} + \frac{5}{9} \frac{6}{27} = \frac{26}{81}, \quad P(X_1 = 2) = \frac{1}{9} \frac{12}{27} = \frac{4}{81}, \quad P(X_1 = 3) = 0.$$

Ces probabilités totalisent $(17 + 26 + 4)/81 = 1$. Ainsi :

$$E(X_1) = 0 \frac{17}{27} + 1 \frac{26}{81} + 2 \frac{4}{81} = \frac{34}{81}.$$

4. b) Les espérances des lois de transition à partir des états 0 et 3 sont nulles. Le membre de droite demandé vaut donc :

$$\sum_{i=0}^3 E(X_1/X_0 = i)P(X_0 = i) = 0 \frac{8}{27} + \frac{2}{3} \frac{12}{27} + \frac{5}{9} \frac{6}{27} + 0 \frac{1}{27} = \frac{24}{81} + \frac{10}{81} = \frac{34}{81} = E(X_1).$$

C'est une vérification explicite par des sommes finies; aucune formule générale d'espérance conditionnelle n'est nécessaire.

5. a) Les quatre événements $[X_n = i]$ forment un système complet, donc :

$$u_n + v_n + w_n + t_n = 1.$$

Les quatre termes sont positifs ou nuls.

5. b) Pour chaque état d'arrivée, on somme sur les états de départ :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{4}{9}v_n + \frac{4}{9}w_n + t_n, \quad v_{n+1} = \frac{4}{9}v_n + \frac{5}{9}w_n, \quad w_{n+1} = \frac{1}{9}v_n, \quad t_{n+1} = 0.$$

On obtient :

$$U_{n+1} = MU_n, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 4/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de M ont une somme égale à 1. La matrice de transition dans la convention officielle en lignes est $Q = {}^tM$, dont les lignes ont une somme égale à 1. Ainsi ${}^t(U_{n+1}) = {}^t(U_n)Q$: les deux conventions sont cohérentes.

5. c) On lit $M = S/9$. Comme $S = RDR^{-1}$:

$$M = R \operatorname{diag}(-1/9, 0, 5/9, 1) R^{-1}.$$

Les valeurs propres de M sont donc exactement $-1/9, 0, 5/9$ et 1 .

5. d) Méthode 1 — Exploitation des puissances de la matrice.

La récurrence donne $U_n = M^n U_0$. Pour $n \geq 1$, les lignes 2 et 3 de $M^n = 9^{-n} S^n$ donnent :

$$v_n = \frac{1}{6} \left[\left(-\frac{1}{9}\right)^n (v_0 - 5w_0) + 5 \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) \right],$$

$$w_n = \frac{1}{6} \left[-\left(-\frac{1}{9}\right)^n (v_0 - 5w_0) + \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) \right].$$

Pour $n = 0$, ces expressions donnent respectivement $((v_0 - 5w_0) + 5(v_0 + w_0))/6 = v_0$ et $-(v_0 - 5w_0) + (v_0 + w_0))/6 = w_0$. Elles sont donc valables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Deux suites géométriques.

On peut isoler les deux variables utiles sans calculer toute la puissance de la matrice.
D'après les récurrences de la question 5. b) :

$$v_{n+1} + w_{n+1} = \frac{5}{9}(v_n + w_n), \quad v_{n+1} - 5w_{n+1} = -\frac{1}{9}(v_n - 5w_n).$$

Par récurrence :

$$v_n + w_n = \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0), \quad v_n - 5w_n = \left(-\frac{1}{9}\right)^n (v_0 - 5w_0).$$

En notant ces deux expressions A_n et B_n , on résout $v_n + w_n = A_n$, $v_n - 5w_n = B_n$:
 $v_n = (5A_n + B_n)/6$ et $w_n = (A_n - B_n)/6$. Cela redonne les deux formules précédentes.
La première méthode réutilise la diagonalisation ; la seconde suffit quand seules ces composantes sont recherchées.

6. a) L'événement F signifie qu'il existe un jour à partir duquel le nombre d'individus contagieux est nul. Comme 0 est absorbant, il s'agit de la disparition définitive du virus en un temps fini.

6. b) Méthode 1 — Limite des probabilités de l'état absorbant.

Les rapports $-1/9$ et $5/9$ ont une valeur absolue strictement inférieure à 1, donc les formules de la question 5. d) donnent $v_n \rightarrow 0$ et $w_n \rightarrow 0$. De plus, $t_n = 0$ pour $n \geq 1$. Par normalisation, $u_n = 1 - v_n - w_n - t_n \rightarrow 1$.

Les événements $A_n = [X_n = 0]$ sont croissants, puisque 0 est absorbant. Par continuité croissante des probabilités :

$$P(F) = P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 1.$$

La preuve vaut pour toute loi initiale.

Méthode 2 — Majoration directe de la survie.

Les transitions de la question 3 donnent $P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = i) \geq 4/9$ pour tout état susceptible d'être atteint; l'état 0 reste absorbant. Les probabilités totales impliquent :

$$P(X_{n+1} > 0) = \frac{5}{9}v_n + \frac{5}{9}w_n \leq \frac{5}{9}P(X_n > 0).$$

Une récurrence donne $P(X_n > 0) \leq (5/9)^n P(X_0 > 0) \leq (5/9)^n$. Cette quantité tend vers zéro, puis la continuité croissante utilisée ci-dessus donne encore $P(F) = 1$. Cette seconde preuve évite la diagonalisation et met en évidence la possibilité uniforme d'extinction à chaque étape.

Partie II. Le cas général

Question adaptée au programme actuel — Préambule, questions 1 et 3. L'hypothèse du sujet d'origine $P(X_n = i) > 0$ pour tous n, i est incompatible avec le modèle : la question 1. a) donne $P(X_1 = N) = 0$. Elle est remplacée par les transitions définies à partir de chaque état. Les calculs conditionnels ne sont alors utilisés que si l'événement conditionnant a une probabilité strictement positive.

1. a) À partir de l'état 0, personne n'est contagieux; à partir de l'état N , personne n'est sain et tous les contagieux guérissent. Ainsi :

$$q_{0,0} = q_{N,0} = 1, \quad q_{0,j} = q_{N,j} = 0 \quad (1 \leq j \leq N).$$

Si l'état de départ i est strictement positif, seuls les $N - i < N$ individus sains peuvent être contagieux le lendemain, donc $q_{i,N} = 0$. Si $i = 0$, la première égalité donne aussi $q_{0,N} = 0$. Par conséquent :

$$q_{i,N} = 0 \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, N\}.$$

1. b) Les i contagieux du jour guérissent et ne peuvent être contagieux le lendemain. Il reste au plus $N - i$ nouveaux contagieux possibles. L'arrivée $j > N - i$ est impossible : $q_{i,j} = 0$.

1. c) Fixons $i \in \{1, \dots, N - 1\}$. Un individu sain échappe aux i transmissions indépendantes avec probabilité q^i ; il est donc contaminé avec probabilité $1 - q^i$. Les transmissions qui concernent deux individus sains distincts portent sur des familles disjointes d'essais indépendants, donc leurs indicatrices de contamination sont indépendantes. On compte les succès sur $N - i$ individus sains :

$$X_{n+1} \text{ à partir de l'état } i \sim \mathcal{B}(N - i, 1 - q^i).$$

En particulier, pour $0 \leq j \leq N - i$:

$$q_{i,j} = \binom{N - i}{j} (1 - q^i)^j (q^i)^{N - i - j},$$

et $q_{i,j} = 0$ sinon. Lorsque $P(X_n = i) > 0$, c'est exactement la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = i]$.

2. a) Chaque ligne de Q représente une loi de probabilité, donc sa somme est égale à 1. Pour $\mathbf{1} = {}^t(1, \dots, 1) \neq 0$, on a $Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Ainsi 1 est valeur propre de Q .
2. b) Le vecteur propre V est non nul. Parmi ses $N + 1$ composantes, le maximum des valeurs absolues est donc strictement positif : $|V(i)| > 0$. La ligne i de $QV = \lambda V$, puis l'inégalité triangulaire et $q_{i,j} \geq 0$, donnent :

$$|\lambda| |V(i)| = \left| \sum_{j=0}^N q_{i,j} V(j) \right| \leq \sum_{j=0}^N q_{i,j} |V(j)| \leq |V(i)| \sum_{j=0}^N q_{i,j} = |V(i)|.$$

On divise par $|V(i)| > 0$: $|\lambda| \leq 1$. Seules des valeurs propres réelles interviennent dans cette adaptation.

3. Pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, les probabilités totales donnent :

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^N q_{i,j} P(X_n = i).$$

Pour les états de probabilité positive, chaque terme s'obtient par conditionnement ; pour les autres, la probabilité de l'intersection correspondante est nulle, ce qui justifie le terme nul sans définir un conditionnement. Le coefficient de la ligne j et de la colonne i de la matrice d'évolution est donc $q_{i,j}$. Ainsi :

$$M = {}^tQ, \quad U_{n+1} = {}^tQU_n.$$

La convention officielle en lignes s'écrit ${}^t(U_{n+1}) = {}^t(U_n)Q$.

4. a) On a $U_n = M^n U_0$ par récurrence. Pour chaque vecteur de la base propre,

$M^n V_k = \lambda_k^n V_k$ si $n \geq 1$. Par linéarité :

$$U_n = \alpha_0 V_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_k^n V_k \quad (n \geq 1).$$

Pour $n = 0$, la décomposition est celle donnée dans l'énoncé,

$$U_0 = \sum_{k=0}^N \alpha_k V_k.$$

Si l'on convient que, pour cette écriture des puissances matricielles, le coefficient de V_k à l'instant 0 est α_k même lorsque $\lambda_k = 0$, on peut regrouper les deux expressions.

4. b) En prenant la $(i + 1)$ -ième composante, pour $n \geq 1$:

$$P(X_n = i) = \alpha_0 V_0(i) + \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_k^n V_k(i).$$

Pour $n = 0$, on a

$$P(X_0 = i) = \sum_{k=0}^N \alpha_k V_k(i).$$

4. c) Pour $i \geq 1$, la composante $V_0(i)$ est nulle. Pour tout $k \geq 1$, l'hypothèse $|\lambda_k| < 1$ donne $\lambda_k^n \rightarrow 0$. La somme comporte un nombre fini de termes, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i) = 0 \quad (1 \leq i \leq N).$$

La conclusion utilise les hypothèses de diagonalisation et de valeurs propres strictement inférieures à 1 en valeur absolue données dans cette partie ; elle ne repose sur aucun théorème général d'ergodicité.

4. d) Méthode 1 — Conclusion à partir de la décomposition spectrale.

En sommant les limites de la question précédente sur les N états non nuls :

$$P(X_n = 0) = 1 - \sum_{i=1}^N P(X_n = i) \rightarrow 1.$$

L'état 0 étant absorbant, les événements $[X_n = 0]$ sont croissants. Ainsi :

$$P(\exists n \in \mathbb{N}, X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = 1.$$

Le virus disparaît presque sûrement en temps fini. Cette déduction est valable pour toute loi initiale et sous les hypothèses spectrales données. Elle impose aussi $\alpha_0 = 1$, puisque la limite de U_n est $\alpha_0 V_0$ et que la somme de ses composantes vaut 1.

Méthode 2 — Une preuve propre au modèle, sans hypothèse spectrale.

La loi binomiale de la question 1. c) donne, pour $1 \leq i \leq N-1$, $q_{i,0} = q^{i(N-i)}$. Pour $i = 0$ et $i = N$, cette probabilité vaut 1. Posons $c = q^{N^2}$. Comme $0 < q < 1$, on a $0 < c < 1$ et $q_{i,0} \geq c$ pour tout état i . En effet, $i(N-i) \leq N^2$ et les puissances de q décroissent avec l'exposant.

Les probabilités totales et l'absorption en 0 donnent :

$$P(X_{n+1} > 0) = \sum_{i=1}^N (1 - q_{i,0}) P(X_n = i) \leq (1 - c) P(X_n > 0).$$

Par récurrence, $P(X_n > 0) \leq (1 - c)^n$, qui tend vers zéro. La même continuité croissante donne l'extinction presque sûre. Cette preuve complémentaire exploite les transitions particulières et montre que, pour ce modèle, les hypothèses spectrales ne sont pas nécessaires à l'extinction.

Partie III. Estimations ponctuelle et par intervalle de confiance de p

1. a) Question adaptée au programme actuel. Les notions de biais et de risque quadratique, non supposées acquises ici comme un chapitre général, sont définies dans le sujet.

Les Y_i sont bornées, donc ont une espérance et une variance : $E(Y_i) = p$ et

$V(Y_i) = p(1 - p) = pq$. Par linéarité :

$$E(\bar{Y}_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(Y_i) = p.$$

La moyenne empirique est une fonction de l'échantillon qui ne dépend pas du paramètre inconnu dans sa définition ; c'est donc un estimateur de p , et l'égalité précédente montre qu'il est sans biais. Comme les Y_i sont indépendantes :

$$V(\bar{Y}_m) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m V(Y_i) = \frac{pq}{m}.$$

Enfin $E(\bar{Y}_m) = p$, donc son risque quadratique vaut :

$$E((\bar{Y}_m - p)^2) = V(\bar{Y}_m) = \frac{p(1 - p)}{m}.$$

L'estimateur est la variable aléatoire $\bar{Y}_m$; après observation de valeurs $y_1, \dots, y_m$, l'estimation est le nombre $(y_1 + \dots + y_m)/m$.

1. b) Pour tout $p \in]0, 1[$, $pq = 1/4 - (p - 1/2)^2 \leq 1/4$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à $\bar{Y}_m$, qui possède un moment d'ordre 2. Pour $\varepsilon > 0$:

$$P(|\bar{Y}_m - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{m\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4m\varepsilon^2}.$$

Avec $\varepsilon = \sqrt{5/m}$, le dernier membre vaut $1/20 = 0,05$. L'événement complémentaire à l'appartenance de p à l'intervalle fermé demandé est $[|\bar{Y}_m - p| > \sqrt{5/m}]$, contenu dans celui que l'on vient de majorer. Ainsi :

$$P \left(p \in \left[\bar{Y}_m - \sqrt{\frac{5}{m}}, \bar{Y}_m + \sqrt{\frac{5}{m}} \right] \right) \geq 0,95.$$

L'intervalle est donc un intervalle de confiance au niveau au moins 0,95, uniformément pour $p \in]0, 1[$. On peut l'intersecter avec $[0, 1]$ sans diminuer sa couverture.

2. a) Question adaptée au programme actuel — Rectification locale. On prend $\theta > 0$, car pour $\theta = 0$ l'événement exponentiel serait certain, alors que l'événement initial ne l'est pas en général.

La fonction $x \mapsto e^{m\theta x}$ est strictement croissante, puisque $m\theta > 0$. Pour chaque issue :

$$\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon \iff \bar{Y}_m \geq p + \varepsilon \iff e^{m\theta \bar{Y}_m} \geq e^{m\theta(p+\varepsilon)}.$$

Les événements sont égaux, donc leurs probabilités le sont.

2. b) Cette inégalité est démontrée ici et n'est pas invoquée comme une connaissance exigible. Écrivons les valeurs possibles de T comme $t_1, \dots, t_r$, toutes positives ou nulles. La somme est finie, donc :

$$E(T) = \sum_{j=1}^r t_j P(T = t_j) \geq \sum_{j:t_j \geq a} t_j P(T = t_j) \geq a \sum_{j:t_j \geq a} P(T = t_j) = aP(T \geq a).$$

Comme $a > 0$, la division donne $P(T \geq a) \leq E(T)/a$.

2. c) On applique la question 2. b) à $T = e^{m\theta \bar{Y}_m}$, positive et à valeurs en nombre fini, et à $a = e^{m\theta(p+\varepsilon)} > 0$. On obtient :

$$P(\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon) \leq e^{-m\theta(p+\varepsilon)} E(e^{m\theta \bar{Y}_m}).$$

Comme

$$m\bar{Y}_m = \sum_{i=1}^m Y_i,$$

on a

$$e^{m\theta\bar{Y}_m} = \prod_{i=1}^m e^{\theta Y_i}.$$

Les variables $e^{\theta Y_i}$ sont indépendantes comme fonctions de variables indépendantes, et elles sont bornées pour θ fixé. Leur produit a donc une espérance égale au produit des espérances. Or la loi de Bernoulli donne :

$$E(e^{\theta Y_i}) = qe^0 + pe^\theta = q + pe^\theta.$$

Ainsi :

$$E(e^{m\theta\bar{Y}_m}) = (q + pe^\theta)^m = e^{mg(\theta)},$$

et finalement $P(\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon) \leq e^{m(g(\theta) - \theta(p+\varepsilon))}$.

2. d) Comme $p, q > 0$, on a $pe^x + q > 0$ pour tout réel x . La fonction g est donc même de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On dérive :

$$g'(x) = \frac{pe^x}{pe^x + q}, \quad g''(x) = \frac{pqe^x}{(pe^x + q)^2}.$$

Pour $A = pe^x > 0$ et $B = q > 0$, l'identité $(A + B)^2 - 4AB = (A - B)^2 \geq 0$ donne :

$$0 < g''(x) = \frac{AB}{(A + B)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

En particulier, $|g''(x)| \leq 1/4$ pour tout $x \geq 0$.

2. e) On a $g(0) = \ln(p+q) = 0$ et $g'(0) = p$. On travaille uniquement sur des segments.

Pour $t \in [0, \theta]$, le théorème fondamental de l'intégration et la continuité de g'' donnent :

$$g'(t) - p = \int_0^t g''(s) ds \leq \frac{t}{4}.$$

On intègre cette majoration entre 0 et θ :

$$g(\theta) - p\theta = \int_0^\theta (g'(t) - p) dt \leq \int_0^\theta \frac{t}{4} dt = \frac{\theta^2}{8}.$$

Donc $g(\theta) \leq p\theta + \theta^2/8$. Le résultat est également vrai en $\theta = 0$; la preuve ne fait intervenir aucune formule de Taylor à reste d'ordre supérieur.

2. f) Pour $x \geq 0$, $h'(x) = x/4 - \varepsilon$. Puisque $\varepsilon > 0$, la fonction h décroît sur $[0, 4\varepsilon]$ puis croît sur $[4\varepsilon, +\infty[$. Elle atteint son minimum en 4ε , de valeur :

$$h(4\varepsilon) = \frac{16\varepsilon^2}{8} - 4\varepsilon^2 = -2\varepsilon^2.$$

Les questions 2. c) et 2. e) donnent, pour tout $\theta > 0$:

$$P(\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon) \leq e^{m(\theta^2/8 - \varepsilon\theta)} = e^{mh(\theta)}.$$

On choisit $\theta = 4\varepsilon > 0$. Ainsi :

$$P(\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2m\varepsilon^2}.$$

3. Les variables $1 - Y_i$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre q , puisque $P(1 - Y_i = 1) = P(Y_i = 0) = q$. Comme $q \in]0, 1[$, on peut appliquer le résultat de la question 2. f) à cet échantillon, avec q à la place de p . Sa moyenne empirique est $\bar{W}_m$, d'où :

$$P(\bar{W}_m - q \geq \varepsilon) \leq e^{-2m\varepsilon^2}.$$

On remarque aussi que $\bar{W}_m = 1 - \bar{Y}_m$ et donc $\bar{W}_m - q = p - \bar{Y}_m$: cette majoration contrôle la déviation inférieure de $\bar{Y}_m$.

4. a) Puisque $\varepsilon > 0$, les événements $[\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon]$ et $[p - \bar{Y}_m \geq \varepsilon]$ sont disjoints, et leur réunion est $[|\bar{Y}_m - p| \geq \varepsilon]$. Les questions 2. f) et 3 donnent :

$$P(|\bar{Y}_m - p| \geq \varepsilon) = P(\bar{Y}_m - p \geq \varepsilon) + P(\bar{W}_m - q \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2m\varepsilon^2}.$$

4. b) Question adaptée au programme actuel — Rectification locale. Pour garantir rigoureusement le niveau annoncé, on conserve la constante exacte $c = -\ln(0,025)/2 = \ln(40)/2$ avant de donner sa valeur approchée. Avec $\varepsilon_m = \sqrt{c/m}$:

$$2e^{-2m\varepsilon_m^2} = 2e^{-2c} = 2e^{\ln(0,025)} = 0,05.$$

La question 4. a), puis le passage de la majoration pour $\geq$ au complément de l'intervalle fermé, donnent :

$$P\left(p \in \left[\bar{Y}_m - \sqrt{\frac{\ln(40)}{2m}}, \bar{Y}_m + \sqrt{\frac{\ln(40)}{2m}}\right]\right) \geq 0,95.$$

Ce nouvel intervalle est donc un intervalle de confiance au niveau au moins 0,95. Sa demi-largeur est approximativement $\sqrt{1,84444/m}$, et la valeur $\sqrt{1,844/m}$ du sujet

d'origine est seulement une approximation. Si on utilisait exactement 1,844, on obtiendrait $2e^{-3,688} \simeq 0,050044 > 0,05$: cette majoration ne garantirait donc pas exactement le niveau 0,95.

Comme $\ln(40)/2 \simeq 1,84444 < 5$, le nouvel intervalle est strictement plus court que celui de la question 1. b), avant éventuelle intersection avec $[0, 1]$, tout en conservant le même niveau garanti. Le rapport de leurs longueurs vaut :

$$\sqrt{\frac{\ln(40)}{10}} \simeq 0,607.$$

La majoration exponentielle fournit ici une estimation par intervalle plus précise que la seule inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comme précédemment, l'intersection avec $[0, 1]$ conserve la couverture.

Relevé des adaptations

Exercice, préambule : l'ouverture du domaine $\mathbb{R}^2$ est indiquée, conformément au cadre des fonctions de deux variables. En 2. c), l'énoncé conforme est conservé et le corrigé étudie les signes des valeurs propres de la hessienne sans déterminant, puis donne une décomposition exacte complémentaire.

Problème, préambule et I. 3, I. 5. b), II. préambule, II. 1 et II. 3 : le calendrier journalier est explicité et les transitions sont définies même à partir d'états non atteints ; un conditionnement n'est utilisé que si l'événement conditionnant a une probabilité strictement positive. L'hypothèse originale de stricte positivité de toutes les probabilités de tous les états est supprimée car elle contredit $q_{i,N} = 0$ et donc $P(X_1 = N) = 0$.

I. 3. d) et I. 4. b) : la notation historique est conservée en la définissant comme l'espérance d'une loi de transition finie ; la formule demandée est vérifiée par calcul, sans supposer connu un théorème général d'espérance conditionnelle.

I. 5 et II. 3 : la convention historique des lois en colonnes est conservée ; la transposition vers la convention officielle des lois en lignes est explicitée.

II. 2. b) et hypothèses précédant II. 4 : les valeurs propres et la diagonalisation considérées sont explicitement réelles.

III. préambule et III. 1. a) : les définitions de l'absence de biais et du risque quadratique sont fournies afin de conserver la question sans supposer connu un chapitre théorique d'estimation.

III. 2. a) : la condition $\theta \geq 0$ est remplacée par $\theta > 0$, indispensable à l'équivalence des événements. Les inégalités qui sont aussi vraies en 0 le restent.

III. 4. b) : la constante arrondie 1,844 est remplacée, pour la garantie exacte du niveau, par $-\ln(0,025)/2$; l'approximation numérique est conservée comme telle.