



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2007

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres de t . Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux. L'endomorphisme t est-il diagonalisable? Est-il bijectif?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme défini par : pour tout $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$ avec $i \neq n+1$, $t(e_i) = e_1$, et

$$t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}.$$

2. a) Déterminer la matrice T associée à t relativement à la base canonique.
2. b) Déterminer le rang de t ainsi que la dimension de son noyau.
2. c) Justifier que 0 est valeur propre de t . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.
3. Montrer que $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$, où $\text{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme de $\text{Im}(t)$ défini par $\tilde{t}(x) = t(x)$. Établir que

$$\mathcal{B} = (e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i)$$

constitue une base de $\text{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à cette base.

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t , et x un vecteur propre associé. Montrer que $x \in \text{Im}(t)$.
5. b) En déduire toutes les valeurs propres de t . L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Problème

Toutes les variables aléatoires qui interviennent sont définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, tous notés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. a) Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^0 g(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ convergent et ont la même valeur.

1. b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire réelle admettant g pour densité. On dit que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

3. a) Montrer, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'existence du moment $m_r(Y) = E(Y^r)$ d'ordre r de Y .
3. b) Calculer $m_r(Y)$ en fonction de r . Quelles sont les valeurs de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$?
4. a) Déterminer la fonction de répartition G de Y .
4. b) Établir que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
4. c) Montrer que l'équation $G(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution et la déterminer.
4. d) Établir que $x \mapsto G(x)(1 - G(x))$ est paire.
5. a) Montrer que l'application réciproque de G est donnée par

$$G^{-1}(u) = \begin{cases} \ln(2u) & \text{si } 0 < u \leq \frac{1}{2}, \\ -\ln(2(1-u)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq u < 1. \end{cases}$$

5. b) Écrire une fonction Python nommée Laplace simulant la loi $\mathcal{L}(0)$. La commande `np.random.random()`, après `import numpy as np`, renvoie un réel pseudo-aléatoire uniforme dans $[0, 1[$; si la valeur obtenue est nulle, effectuer un nouveau tirage. La commande `np.log(u)` calcule le logarithme népérien de $u > 0$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$g_n(x) = g(x)(1 + xe^{-n|x|}).$$

Montrer que g_n définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n une variable de densité g_n et par G_n sa fonction de répartition.

7. a) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la majoration

$$|G_n(x) - G(x)| \leq \frac{1}{ne} G(x).$$

7. b) En déduire que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{L}(0)$.

Partie II

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre inconnu et X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit la loi $\mathcal{L}(\theta)$ si elle admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un $(2n+1)$ -échantillon $(X_1, \dots, X_{2n+1})$ de variables indépendantes de même loi $\mathcal{L}(\theta)$.

1. a) Déterminer la fonction de répartition F de X .

1. b) En déduire que $X - \theta$ suit la loi $\mathcal{L}(0)$.

1. c) Calculer l'espérance et la variance de X .

1. d) Résoudre l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, on pose $Z_i = \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$. Ainsi Z_i est une variable de Bernoulli telle que $P(Z_i = 1) = P(X_i \leq x)$.

2. a) Établir l'indépendance de $Z_1, \dots, Z_{2n+1}$.

2. b) Soit

$$S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i.$$

Quelle est sa loi? Préciser son espérance et sa variance.

3. On pose

$$\overline{X}_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i.$$

Un estimateur T de θ est dit sans biais si $E(T) = \theta$. Son risque quadratique en θ est $R_\theta(T) = E((T - \theta)^2)$, lorsque cette espérance existe.

3. a) Montrer que $\overline{X}_{2n+1}$ est un estimateur sans biais de θ .

3. b) Calculer son risque quadratique en θ .

Partie III

Le contexte est identique à celui de la partie II. Pour tout $\omega \in \Omega$, on range dans l'ordre croissant les réels $X_1(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$, et on note $\widehat{X}_1(\omega), \dots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$ les nombres ainsi rangés. On définit ainsi les variables aléatoires $\widehat{X}_1 \leq \dots \leq \widehat{X}_{2n+1}$. On admet que $P(\widehat{X}_1 < \dots < \widehat{X}_{2n+1}) = 1$.

On s'intéresse à la médiane $\widehat{X}_{n+1}$.

1. a) Pour tout réel x , justifier l'égalité d'événements $[\widehat{X}_{n+1} \leq x] = [S_{2n+1} \geq n+1]$.

1. b) En déduire la fonction de répartition $\widehat{F}_{n+1}$ de $\widehat{X}_{n+1}$ en fonction de F , sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

2. On note $\widehat{f}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1}$ et $\widehat{g}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1} - \theta$.

2. a) Établir, pour tout $j \in \{0, \dots, 2n\}$, l'égalité

$$(j+1) \binom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1) \binom{2n+1}{j}.$$

2. b) En déduire, pour tout réel x ,

$$\hat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} F(x)^n (1 - F(x))^n f(x).$$

2. c) Établir, pour tout réel x ,

$$\hat{g}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} G(x)^n (1 - G(x))^n g(x).$$

2. d) En utilisant I.4.d, montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais de θ .

3. Dans cette question, on étudie le comportement de $(\widehat{X}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On désigne par $\hat{h}_{n+1}$ une densité de $\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.

3. a) Montrer que, pour tout réel x ,

$$\hat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)^n \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right).$$

3. b) Écrire, lorsque $u \rightarrow 0$, le développement limité à l'ordre 2 de e^{-u} et celui à l'ordre 1 de $\ln(1 - u)$.

3. c) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{2n+1} + o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right).$$

Indication : grâce à I.4.d, se ramener à $u = |x|/\sqrt{2n+1} \geq 0$ et appliquer directement Taylor-Young à la fonction $q(u) = \frac{1}{2}e^{-u} - \frac{1}{4}e^{-2u}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

3. d) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) \right]^n = e^{-x^2/2}.$$

3. e) On admet, lorsque $n \rightarrow +\infty$, l'équivalent

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

4. On admet que, dans ce problème, le résultat précédent entraîne la convergence en loi de $\sqrt{2n+1}(\hat{X}_{n+1} - \theta)$ vers la loi normale centrée réduite.

Montrer que l'intervalle $[I_n, J_n]$ défini par

$$I_n = \hat{X}_{n+1} - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}, \quad J_n = \hat{X}_{n+1} + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour θ , de niveau approximativement 0.95 (risque approximativement 0.05). On rappelle que $\Phi(1.96) \simeq 0.975$, où Φ est la fonction de répartition normale centrée réduite.