



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2007

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1. On travaille sur la matrice donnée. Pour $X = {}^t(a, b, c)$, on a $TX = {}^t(a + b + c, b, b)$. Si $TX = \lambda X$, alors $b = \lambda b$ et $b = \lambda c$. Lorsque $\lambda \notin \{0, 1\}$, la première de ces relations donne $b = 0$, puis $c = 0$, et la première coordonnée donne $a = 0$. Un tel λ ne peut donc pas être valeur propre.

Pour $\lambda = 0$, les équations donnent $b = 0$ et $a = -c$. Ainsi $E_0 = \text{Vect}(e_3 - e_1)$, de dimension 1. Pour $\lambda = 1$, on obtient $b = c$ et $b + c = 0$, donc $b = c = 0$: $E_1 = \text{Vect}(e_1)$, de dimension 1.

Les valeurs propres sont exactement 0 et 1. Les deux espaces propres ne fournissent que deux vecteurs indépendants dans un espace de dimension 3 : T , donc t , n'est pas diagonalisable. Son noyau étant non nul, t n'est pas bijectif.

2. a) Posons

$$s = \sum_{i=1}^{2n+1} e_i.$$

Les colonnes de T sont e_1 , sauf la colonne $n + 1$, qui est s . Autrement dit,

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = n + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette description précise toutes les entrées, y compris l'entrée $(1, n + 1)$, égale à 1.

2. b) L'image est engendrée par les colonnes, donc $\text{Im}(t) = \text{Vect}(e_1, s)$. Ces deux vecteurs sont libres : si $ae_1 + bs = 0$, la coordonnée $n + 1$, distincte de la première puisque $n \geq 1$, donne $b = 0$, puis $a = 0$. Le rang vaut donc 2. Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(t) = (2n + 1) - 2 = 2n - 1$.

2. c) Pour

$$x = \sum_i x_i e_i,$$

la description des colonnes donne

$$t(x) = \left(\sum_{i \neq n+1} x_i \right) e_1 + x_{n+1} s.$$

L'indépendance de e_1 et s montre que $x \in \text{Ker}(t)$ équivaut à $x_{n+1} = 0$ et

$$\sum_{i \neq n+1} x_i = 0.$$

Ce noyau, de dimension $2n - 1 \geq 1$, est donc le sous-espace propre E_0 . Une base est

$$(e_j - e_1)_{j \in \{2, \dots, 2n+1\} \setminus \{n+1\}}.$$

Ces $2n - 1$ vecteurs sont libres en examinant leurs coordonnées d'indice $j \neq 1, n + 1$. Ils engendrent le noyau car tout x de celui-ci s'écrit

$$\sum_{j \neq 1, n+1} x_j (e_j - e_1).$$

3. Pour tout x , $t(t(x))$ est par définition une image par t d'un vecteur de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Il appartient donc à $\text{Im}(t)$, ce qui prouve l'inclusion. En particulier t envoie son image dans elle-même, ce qui rend la définition de $\tilde{t}$ légitime.

4. La question 2.b a établi que $\mathcal{B} = (e_1, s)$ est une base de l'image. On a $t(e_1) = e_1$ et

$$t(s) = \sum_{i \neq n+1} t(e_i) + t(e_{n+1}) = 2ne_1 + s.$$

La matrice de la restriction dans cette base est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. a) Si $t(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, alors $x = t(x/\lambda)$. Ainsi $x \in \text{Im}(t)$.
5. b) Toute valeur propre non nulle de T se recherche donc dans la matrice A . Le système $t(A(a, b)) = \lambda t(a, b)$ donne $(1 - \lambda)b = 0$ et $(1 - \lambda)a + 2nb = 0$. Pour $\lambda \neq 1$, il impose $a = b = 0$. Pour $\lambda = 1$, il impose $b = 0$, tandis que a est libre. Ainsi les seules valeurs propres de t sont 0 et 1, et $E_1 = \text{Vect}(e_1)$.

Les bases de E_0 et E_1 , associées à des valeurs propres distinctes, se concatènent en une famille libre de $2n$ vecteurs. Tout vecteur propre appartient à l'un de ces deux espaces : ils ne peuvent donc fournir une base de dimension $2n + 1$. L'endomorphisme n'est pas diagonalisable, pour tout $n \geq 1$.

Problème — Partie I

1. a) Pour $B > 0$, on calcule sur les segments :

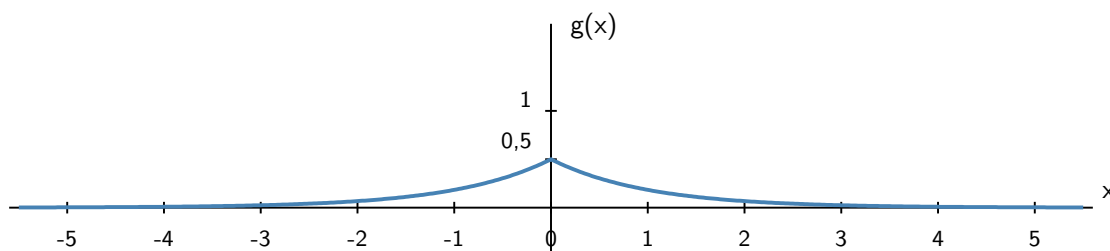
$$\int_{-B}^0 g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-B}^0 e^x dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-B}),$$

$$\int_0^B g(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^B e^{-x} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-B}).$$

Le passage à la limite lorsque $B \rightarrow +\infty$ donne deux intégrales convergentes, chacune égale à $1/2$.

1. b) La fonction g est positive et continue sur $\mathbb{R}$. D'après 1.a son intégrale totale vaut 1. Elle est donc une densité de probabilité, avec des limites finies à gauche et à droite en chaque point.
2. Sur $] -\infty, 0[$, $g'(x) = e^x/2 > 0$; sur $]0, +\infty[$, $g'(x) = -e^{-x}/2 < 0$. La fonction est continue en 0, où elle atteint son maximum $1/2$, mais n'y est pas dérivable : ses

dérivées à gauche et à droite valent respectivement $1/2$ et $-1/2$. Elle est paire et tend vers 0 aux deux infinis. Voici son allure, calculée à partir de sa formule ; les échelles des deux axes sont identiques.



3. a) Par transfert, il faut vérifier la convergence de $\int_{\mathbb{R}} |x|^r g(x) dx$. La parité de l'intégrande la ramène à

$$J_r = \int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx.$$

Par croissances comparées, $x^{r+2}e^{-x} \rightarrow 0$. Pour x assez grand, $0 \leq x^r e^{-x} \leq x^{-2}$, dont l'intégrale à l'infini converge ; l'intégrande est continue sur tout segment de $[0, +\infty[$. Ainsi J_r converge et tous les moments demandés existent.

3. b) On a $J_0 = 1$. Pour $r \geq 1$, une intégration par parties sur $[0, B]$ donne

$$\int_0^B x^r e^{-x} dx = -B^r e^{-B} + r \int_0^B x^{r-1} e^{-x} dx.$$

Le terme de bord tend vers 0 par croissances comparées. Les intégrales convergent d'après 3.a, donc $J_r = rJ_{r-1}$, puis $J_r = r!$ par récurrence. Par parité, les moments impairs sont nuls, et pour les moments pairs on obtient

$$m_r(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impair,} \\ r! & \text{si } r \text{ est pair.} \end{cases}$$

En particulier $E(Y) = 0$, $E(Y^2) = 2$ et $V(Y) = 2$.

4. a) Pour $x \leq 0$, l'intégration de $e^t/2$ donne $G(x) = e^x/2$. Pour $x \geq 0$, en utilisant $G(0) = 1/2$, on obtient $G(x) = 1 - e^{-x}/2$. Ainsi

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0. \end{cases}$$

Les deux expressions coïncident en 0.

4. b) La densité g est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc G est C^1 et $G' = g > 0$. Elle est strictement croissante, avec limites 0 et 1 aux deux infinis. Par continuité et par le théorème des valeurs intermédiaires, son image est exactement $]0, 1[$; la stricte croissance assure l'injectivité.
4. c) On a $G(0) = 1/2$. La stricte croissance établie en 4.b assure qu'il n'y a aucune autre solution : $x = 0$.

4. d) Méthode 1 — Symétrie de la répartition.

Les expressions de 4.a donnent $G(-x) = 1 - G(x)$ pour tout réel x . Ainsi $G(-x)(1 - G(-x)) = (1 - G(x))G(x)$: la fonction est paire. Cette méthode réutilise directement la symétrie de la loi.

Méthode 2 — Expression utilisant la valeur absolue.

Pour $x \geq 0$, le produit vaut $e^{-x}/2 - e^{-2x}/4$. Pour $x \leq 0$, il vaut $e^x/2 - e^{2x}/4$. Dans les deux cas,

$$G(x)(1 - G(x)) = \frac{1}{2}e^{-|x|} - \frac{1}{4}e^{-2|x|}.$$

Cette expression ne dépend que de $|x|$, ce qui prouve la parité et sera utile pour les développements de III.3.

5. a) Si $0 < u \leq 1/2$, la solution de $G(x) = u$ est négative ou nulle, et $e^x/2 = u$ donne $x = \ln(2u)$. Si $1/2 \leq u < 1$, elle est positive ou nulle; l'équation $1 - e^{-x}/2 = u$ donne $x = -\ln(2(1-u))$. En $u = 1/2$, les deux expressions donnent 0. Cela établit la formule sur tout le domaine $]0, 1[$.

5. b) Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy as np

def Laplace():
    u = np.random.random()
    while u == 0:
        u = np.random.random()
    if u <= 0.5:
        return np.log(2 * u)
    else:
        return -np.log(2 * (1 - u))
```

Le tirage u est uniforme, et le rejet de la valeur nulle empêche l'évaluation de son logarithme. Dans le modèle continu, ce rejet concerne un événement de probabilité nulle. Puisque G est strictement croissante, pour U uniforme sur $]0, 1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(G^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq G(x)) = G(x).$$

La fonction renvoie donc une simulation de la loi voulue. Le code a été exécuté; la cohérence de la transformation repose sur cette égalité de fonctions de répartition, et non sur les fréquences simulées.

6. Pour $v \geq 0$, la fonction $v \mapsto ve^{-nv}$ a pour dérivée $(1 - nv)e^{-nv}$. Son maximum est donc $1/(ne)$, atteint en $1/n$. Par suite,

$$|xe^{-n|x|}| \leq \frac{1}{ne} < 1.$$

Ainsi g_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus $|x|g(x)e^{-n|x|} \leq g(x)/(ne)$: le terme ajouté est absolument intégrable. La fonction $x \mapsto xg(x)e^{-n|x|}$ est impaire ; ses intégrales sur les deux demi-droites s'annulent, car elles convergent absolument. On en déduit $\int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} g = 1$. Les critères d'une densité sont donc satisfaits.

7. a) La différence s'écrit

$$G_n(x) - G(x) = \int_{-\infty}^x tg(t)e^{-n|t|} dt.$$

L'absolue convergence établie en 6 autorise la majoration de l'intégrale en valeur absolue. En utilisant le maximum calculé en 6,

$$|G_n(x) - G(x)| \leq \int_{-\infty}^x |t|e^{-n|t|}g(t) dt \leq \frac{1}{ne} \int_{-\infty}^x g(t) dt = \frac{G(x)}{ne}.$$

7. b) Pour tout réel x , $G(x)$ est fixé et la majoration précédente tend vers 0. Ainsi $G_n(x) \rightarrow G(x)$ pour tout x . Comme G est continue sur $\mathbb{R}$, la définition de la convergence en loi donne $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(0)$.

Partie II

1. a) On a $f(x) = g(x - \theta)$. En intégrant et en effectuant une translation sur les segments, puis en passant à la limite à la borne inférieure, on obtient $F(x) = G(x - \theta)$, soit

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-\theta} & x \leq \theta, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-(x-\theta)} & x \geq \theta. \end{cases}$$

1. b) Pour tout réel y , $P(X - \theta \leq y) = F(y + \theta) = G(y)$. La variable $X - \theta$ a donc la loi $\mathcal{L}(0)$.

1. c) La variable $X - \theta$ possède une espérance et une variance d'après I.3. Les transformations affines donnent $E(X) = \theta$ et $V(X) = 2$.

1. d) On a $F(x) = 1/2$ si et seulement si $G(x - \theta) = 1/2$. D'après I.4.c, cela équivaut à $x - \theta = 0$. La solution unique est $x = \theta$.
2. a) Question adaptée au programme actuel : la définition explicite par indicatrices est nécessaire.

Chaque Z_i est une fonction de la seule variable X_i . Les X_i étant mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions donne l'indépendance mutuelle des Z_i . Elles suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p = F(x) \in]0, 1[$. Connaître seulement les probabilités marginales $P(Z_i = 1)$ ne suffirait pas à conclure à l'indépendance.

2. b) Une somme de $2n + 1$ variables indépendantes de Bernoulli de même paramètre $F(x)$ suit la loi $\mathcal{B}(2n + 1, F(x))$. Par les formules de cette loi,

$$E(S_{2n+1}) = (2n + 1)F(x), \quad V(S_{2n+1}) = (2n + 1)F(x)(1 - F(x)).$$

3. a) Question adaptée au programme actuel : la notion de biais est définie dans le sujet.

Chaque X_i est intégrable, donc la moyenne l'est et la linéarité donne

$$E(\bar{X}_{2n+1}) = \frac{1}{2n + 1} \sum_{i=1}^{2n+1} E(X_i) = \frac{(2n + 1)\theta}{2n + 1} = \theta.$$

Ainsi la moyenne empirique est sans biais.

3. b) Question adaptée au programme actuel : la définition du risque quadratique est fournie.

Les X_i ont un moment d'ordre 2, donc leur moyenne également. Comme les variables sont indépendantes,

$$V(\bar{X}_{2n+1}) = \frac{1}{(2n + 1)^2} \sum_{i=1}^{2n+1} V(X_i) = \frac{2}{2n + 1}.$$

Puisque son espérance vaut θ , le risque demandé est exactement cette variance :

$R_\theta(\bar{X}_{2n+1}) = 2/(2n+1)$. Cette formule vaut aussi pour $n = 0$.

Partie III

1. a) Pour chaque réalisation, S_{2n+1} compte le nombre d'observations inférieures ou égales à x . Le $(n+1)$ -ième élément rangé est inférieur ou égal à x si et seulement si au moins $n+1$ observations le sont. Cela donne exactement l'égalité des événements, même en présence d'ex æquo.

1. b) En utilisant la loi binomiale de II.2.b, on obtient

$$\widehat{F}_{n+1}(x) = P(S_{2n+1} \geq n+1) = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} F(x)^j (1-F(x))^{2n+1-j}.$$

La somme est finie ; aucune difficulté de convergence n'intervient.

2. a) Les deux membres se calculent par la définition factorielle. Pour $0 \leq j \leq 2n$,

$$(j+1) \binom{2n+1}{j+1} = \frac{(2n+1)!}{j!(2n-j)!} = (2n-j+1) \binom{2n+1}{j}.$$

2. b) La fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque f est continue, avec $F' = f$. La formule de 1.b est une somme finie de fonctions C^1 : sa dérivation est donc légitime. Posons $m = 2n+1$ et $p = F(x)$. En séparant le dernier terme pour éviter une puissance d'exposant -1 , on écrit

$$\widehat{F}'_{n+1}(x) = f(x) \left[\sum_{j=n+1}^m j \binom{m}{j} p^{j-1} (1-p)^{m-j} - \sum_{j=n+1}^{m-1} (m-j) \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j-1} \right].$$

Dans la première somme, posons $k = j-1$. L'identité 2.a donne

$(k+1)\binom{m}{k+1} = (m-k)\binom{m}{k}$. Les termes d'indices $k = n+1, \dots, m-1$ de cette somme annulent exactement ceux de la seconde. Il reste uniquement le terme $k = n$:

$$\widehat{F}'_{n+1}(x) = f(x)(n+1)\binom{2n+1}{n}p^n(1-p)^n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}F(x)^n(1-F(x))^nf(x).$$

La répartition est continue et C^1 ; sa dérivée positive est donc une densité. Cela justifie en même temps l'existence de la densité annoncée et sa formule. Pour $n = 0$, elle se réduit bien à f .

2. c) Par translation, la répartition de $\widehat{X}_{n+1} - \theta$ est $x \mapsto \widehat{F}_{n+1}(x + \theta)$. Sa densité est $\widehat{f}_{n+1}(x + \theta)$. Or $F(x + \theta) = G(x)$ et $f(x + \theta) = g(x)$. Ainsi

$$\widehat{g}_{n+1}(x) = C_n(G(x)(1-G(x)))^ng(x), \quad C_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.$$

2. d) Question adaptée au programme actuel : « sans biais » est utilisé avec la définition fournie en II.3.

D'abord, pour $u \in [0, 1]$, $u(1-u) = 1/4 - (u - 1/2)^2 \leq 1/4$. Il s'ensuit

$$0 \leq \widehat{g}_{n+1}(x) \leq C_n 4^{-n}g(x).$$

Pour chaque n fixé, $C_n 4^{-n}$ est fini. La finitude de $\int |x|g(x) dx$ établie en I.3 prouve l'existence de l'espérance de $\widehat{X}_{n+1} - \theta$. D'après I.4.d, le facteur $G(x)(1-G(x))$ est pair, tout comme g . La densité $\widehat{g}_{n+1}$ est donc paire ; l'intégrande $x\widehat{g}_{n+1}(x)$ est impaire et absolument intégrable. Son intégrale vaut 0. Par conséquent $E(\widehat{X}_{n+1}) = \theta$: la médiane empirique est sans biais.

3. a) Posons $a = \sqrt{2n+1} > 0$ et $W = \widehat{X}_{n+1} - \theta$. Pour tout réel x ,

$P(aW \leq x) = P(W \leq x/a)$. En dérivant cette répartition, la densité est

$\widehat{h}_{n+1}(x) = a^{-1}\widehat{g}_{n+1}(x/a)$. En remplaçant $\widehat{g}_{n+1}$ par la formule 2.c, on obtient

exactement

$$\hat{h}_{n+1}(x) = \frac{C_n}{\sqrt{2n+1}} \left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) \right]^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right).$$

3. b) Les développements usuels demandés sont, pour $u \rightarrow 0$,

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} + o(u^2), \quad \ln(1 - u) = -u + o(u).$$

Ils s'obtiennent aussi directement par Taylor-Young sur les fonctions $u \mapsto e^{-u}$, de classe C^2 , et $u \mapsto \ln(1 - u)$, de classe C^1 au voisinage de 0.

3. c) Question adaptée au programme actuel : l'indication permet d'appliquer directement Taylor-Young à une fonction précise, sans supposer acquises des règles de calcul des développements limités.

Pour $u \geq 0$, I.4.d donne $G(u)(1 - G(u)) = q(u)$ avec $q(u) = e^{-u}/2 - e^{-2u}/4$. Cette fonction est C^2 sur $\mathbb{R}$ et

$$q(0) = \frac{1}{4}, \quad q'(u) = -\frac{1}{2}e^{-u} + \frac{1}{2}e^{-2u}, \quad q'(0) = 0,$$

$$q''(u) = \frac{1}{2}e^{-u} - e^{-2u}, \quad q''(0) = -\frac{1}{2}.$$

Taylor-Young donne donc $q(u) = 1/4 - u^2/4 + u^2\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0$. Pour $x \neq 0$ fixé, posons $u_n = |x|/\sqrt{2n+1}$. La parité puis cette égalité donnent

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4(2n+1)} + \frac{x^2}{2n+1}\varepsilon(u_n).$$

Le dernier terme est $o(1/(2n+1))$, ce qui prouve la formule attendue. Pour $x = 0$, le produit vaut exactement $1/4$ pour tout n , et le résultat est également vrai.

3. d) Notons $a_n = 4G(x/\sqrt{2n+1})(1 - G(x/\sqrt{2n+1}))$. D'après 3.c,

$$a_n = 1 + v_n, \quad v_n = -\frac{x^2}{2n+1} + o\left(\frac{1}{2n+1}\right).$$

On a $a_n > 0$ car G prend ses valeurs dans $]0, 1[$. Taylor-Young pour le logarithme s'écrit $\ln(1+v) = v + v\eta(v)$, où $\eta(v) \rightarrow 0$. Comme $nv_n \rightarrow -x^2/2$ et que cette suite est bornée, on obtient

$$n \ln(a_n) = nv_n + nv_n \eta(v_n) \rightarrow -\frac{x^2}{2}.$$

La continuité de l'exponentielle donne $a_n^n \rightarrow e^{-x^2/2}$. C'est la limite demandée, car $a_n^n = 4^n [G(x/\sqrt{2n+1})(1 - G(x/\sqrt{2n+1}))]^n$. Pour $x = 0$, elle vaut directement 1 pour tout n .

3. e) Résultat admis dans cette version adaptée : $\binom{2n}{n} 4^{-n} \sim 1/\sqrt{\pi n}$, comme dans l'énoncé original. Il fournit le facteur de normalisation de la densité.

L'identité $C_n = (2n+1)\binom{2n}{n}$ permet d'écrire, avec a_n défini en 3.d,

$$\hat{h}_{n+1}(x) = \left[\sqrt{2n+1} \binom{2n}{n} 4^{-n} \right] a_n^n g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right).$$

Le facteur entre crochets tend vers $\sqrt{2/\pi}$ grâce à l'équivalent admis. Le deuxième facteur tend vers $e^{-x^2/2}$ par 3.d. Enfin, g est continue en 0, donc le dernier facteur tend vers $g(0) = 1/2$. En multipliant ces trois limites finies, on obtient

$$\hat{h}_{n+1}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

4. Question adaptée au programme actuel : le niveau de confiance est asymptotique, avec l'arrondi numérique précisé.

Résultat admis dans cette version adaptée : dans la situation étudiée,

$W_n = \sqrt{2n+1}(\hat{X}_{n+1} - \theta)$ converge en loi vers une variable Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette admission particulière, déjà présente dans le sujet original, sert uniquement à calculer la limite de la couverture.

L'événement $I_n \leq \theta \leq J_n$ équivaut à $|W_n| \leq 1.96$. Chaque W_n possède une densité, donc

n'a pas d'atome à -1.96 . La convergence en loi et la continuité de Φ donnent

$$P(I_n \leq \theta \leq J_n) = P(W_n \leq 1.96) - P(W_n \leq -1.96) \rightarrow \Phi(1.96) - \Phi(-1.96).$$

Par symétrie de la loi normale, cette limite vaut $2\Phi(1.96) - 1 \simeq 0.95$. Il s'agit donc d'un intervalle de confiance asymptotique de niveau approximativement 95%, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$. Pour une limite exactement égale à 0.95, on remplacerait 1.96 par le quantile $z = \Phi^{-1}(0.975)$. La convergence admise n'affirme pas un niveau de couverture exact pour un échantillon de taille finie. Après observation des données, remplacer la médiane aléatoire par la médiane observée donne l'intervalle numérique d'estimation.

Relevé des adaptations

- I.5.b : Code adapté en Python ; documentation des commandes et traitement de la valeur pseudo-aléatoire nulle pour définir les logarithmes.
- II.2.a et III.1.a : les variables Z_i sont explicitement définies comme indicatrices de $[X_i \leq x]$. Dans l'original, seules leurs probabilités marginales étaient indiquées, ce qui ne suffisait ni à établir leur indépendance ni à identifier S_{2n+1} au nombre d'observations inférieures ou égales à x .
- II.3.a-b et III.2.d : les notions de biais et de risque quadratique sont définies dans le sujet ; les résultats particuliers sont établis directement par l'espérance et la variance.
- III.3.c : ajout d'une indication de Taylor-Young appliqué directement à q , afin de ne pas exiger des techniques de calcul de développements limités par produit et composition.
- III.4 : rectification de l'affirmation d'un niveau de confiance exact en un niveau asymptotique approximativement égal à 0.95, conformément à la seule convergence en loi disponible et à l'arrondi 1.96.