



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2006

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, λ et μ deux nombres réels strictement positifs et B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $B = (b_{i,j})$, avec

$$b_{i,j} = \begin{cases} \lambda & \text{si } j = i + 1, \\ \mu & \text{si } j = i - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On s'intéresse aux valeurs propres de B et, pour a réel, on note $A_a = B - aI_n$, où I_n désigne la matrice unité d'ordre n .

1. Exemple. Dans cette question, on considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a) La matrice B est-elle diagonalisable ?

1. b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice B .

On revient maintenant au cas général. On dira qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (R) lorsque l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mu u_k - a u_{k+1} + \lambda u_{k+2} = 0$.

2. Montrer qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A_a X = 0$ si et seulement si, en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, les nombres $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ sont les $n + 2$ premiers termes d'une suite vérifiant (R) .

3. On suppose dans cette question que $a^2 > 4\lambda\mu$.

3. a) Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R) .

3. b) Montrer que si un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A_a X = 0$, alors X est le vecteur nul.

4. On suppose dans cette question que $a^2 = 4\lambda\mu$.

4. a) Déterminer l'ensemble des suites vérifiant (R) .

4. b) Montrer que si un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $A_a X = 0$, alors X est le vecteur nul.

5. a) En déduire que si B admet des valeurs propres, elles appartiennent à l'intervalle $] - 2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}[$.

5. b) Un théorème classique dû à Jacques Hadamard affirme que si le réel a est une valeur propre de B , alors $|a| \leq \lambda + \mu$; ce résultat est admis. Le résultat obtenu en 5. a) est-il meilleur que celui du théorème d'Hadamard ?

Problème

Ce problème étudie un processus aléatoire discret représenté par une suite de variables aléatoires de Bernoulli, puis un modèle continu et, dans un cas particulier, une comparaison entre les deux modèles.

Dans tout le problème, λ désigne un nombre réel de l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Partie I : Modèle discret

On suppose donnée une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le paramètre de X_n .

On suppose que $p_0 \in]0, 1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles suivantes sont définies et vérifient

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = p_n, \quad P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = \lambda p_n.$$

On rappelle que la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ peut aussi se noter $P(B \mid A)$.

1. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = (1 - \lambda)p_n^2 + \lambda p_n$.
1. b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < p_n < 1$.
2. a) Montrer que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. b) On pose $a = (1 - \lambda)p_0 + \lambda$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $p_n \leq a^n$. En déduire que la série de terme général p_n est convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$Y_n = \sum_{k=0}^n X_k$$

et on note $E(Y_n)$ son espérance.

3. a) Justifier l'existence de la limite, notée L , de la suite $(E(Y_n))$.
3. b) Écrire une fonction Python permettant de calculer une valeur approchée de L à partir de n , p_0 et λ . L'en-tête de cette fonction sera :

Python

```
def approx(n, p0, lam):
```

4. a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la covariance $\text{Cov}(X_n, X_{n+1})$ en fonction de p_n et p_{n+1} .
Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes?
4. b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1}/p_n = \lambda$.
4. c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le coefficient de corrélation linéaire de X_n et X_{n+1} :

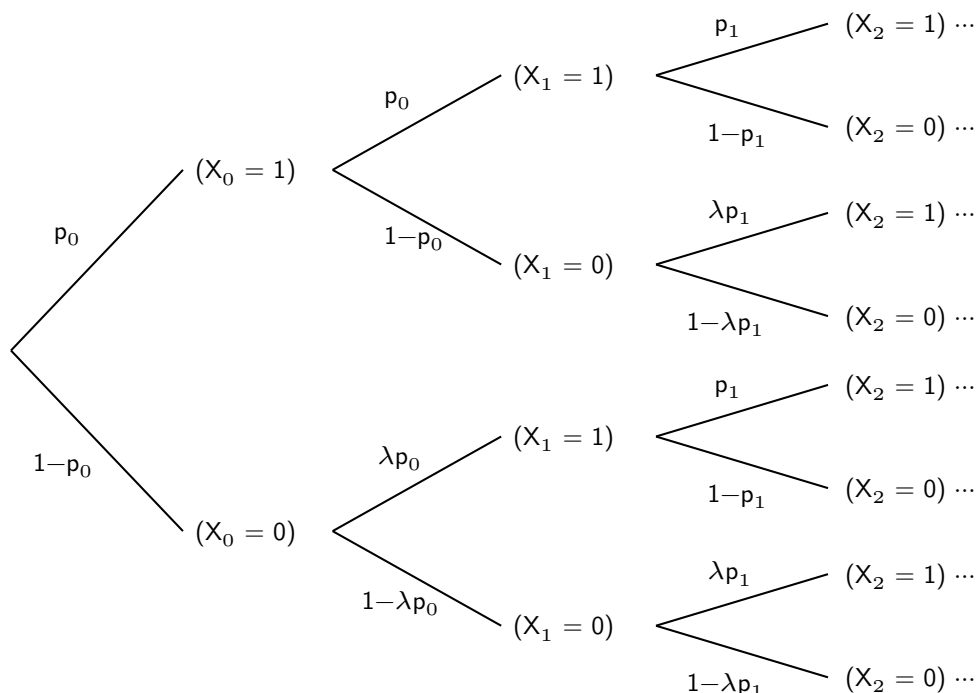
$$r_n = \frac{\text{Cov}(X_n, X_{n+1})}{\sqrt{V(X_n)V(X_{n+1})}}.$$

Exprimer r_n en fonction de p_n et p_{n+1} . Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, r_n est équivalent à $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}p_n$.

Partie II : Simulation

Dans cette partie, on précise la réalisation du modèle : conditionnellement à toute histoire de probabilité strictement positive $(X_0 = x_0, \dots, X_i = x_i)$, la probabilité que $X_{i+1} = 1$ vaut p_i si $x_i = 1$, et λp_i si $x_i = 0$. Les nombres p_i sont ceux de la partie I. On construit ainsi une chaîne de Markov dont les transitions dépendent du rang.

On considère un entier N tel que $1 \leq N \leq 200$, les variables $X_0, \dots, X_N$ et $Y_N = X_0 + \dots + X_N$. Les premiers embranchements de la construction sont les suivants.



La commande `random()` de `numpy.random` fournit un nombre pseudo-aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$. Les appels successifs sont utilisés pour représenter des tirages indépendants. La liste `T` ci-dessous contient les effectifs des valeurs possibles de Y_N , de 0 à $N + 1$. On étudie le programme suivant; `int` et `float` convertissent une saisie en entier et en réel, et `print` affiche son argument.

Python

```
from numpy.random import random
```

```
def bernoulli(p):
```

```
    if random() <= p:
```

```
        return 1
```

```
    return 0
```

```
def simulation(N, p0, lam):
```

```
    p = p0
```

```
    x = bernoulli(p)
```

```
    C = x
```

```
    for i in range(1, N + 1):
```

```
        q = p
```

```

    if x == 0:
        q = lam * p
    x = bernoulli(q)
    C = C + x
    p = (1 - lam) * p * p + lam * p
return C

lam = float(input())
p0 = float(input())
N = int(input())
T = [0] * (N + 2)
for k in range(10000):
    y = simulation(N, p0, lam)
    T[y] = T[y] + 1
for k in range(N + 2):
    print(T[k])

```

1. Expliquer le résultat rendu par la fonction `bernoulli`.
2. Expliquer le fonctionnement de la fonction `simulation` et donner en particulier la signification du résultat rendu.
3. Le programme permet de simuler une variable aléatoire. En se référant à la loi faible des grands nombres, quelle loi de probabilité peut-on approcher grâce à ce programme ?

Partie III : Modèle continu

Soit ℓ un réel tel que $0 < \ell < 1$ et soit T un réel strictement positif. Pour tout $t \in [0, T]$, on définit une variable aléatoire $X(t)$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(t)$, c'est-à-dire $p(t) = P(X(t) = 1)$.

On suppose que la fonction p est définie et dérivable sur $[0, T]$, de dérivée p' , et vérifie, pour tout $t \in [0, T]$:

$$p'(t) = (1 - \ell)p(t)(p(t) - 1).$$

On note $p(0) = p_0$ et on suppose que $p_0 \in]0, 1[$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, T]$ par $f(t) = p(t)e^{(1-\ell)t}$. Montrer que f est croissante sur $[0, T]$ et en déduire que p ne s'annule pas sur $[0, T]$.

2. a) Soit g la fonction définie sur $[0, T]$ par $g(t) = e^{-(1-\ell)t}/p(t)$. Exprimer $g'(t)$ en fonction de ℓ et en déduire qu'il existe une constante k telle que, pour tout $t \in [0, T]$, $g(t) = k + e^{(\ell-1)t}$.

2. b) Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$p(t) = \frac{p_0}{p_0 + (1 - p_0)e^{(1-\ell)t}}.$$

2. c) Dresser le tableau des variations de p sur $[0, T]$. Soit (C) la courbe représentative de p dans un repère orthogonal. À quelle condition portant sur p_0 la courbe présente-t-elle un point d'inflexion à l'intérieur de $[0, T]$? Quelles sont les coordonnées de ce point?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\delta = T/n$ et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $t_k = k\delta$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$Z_n = \sum_{k=0}^n X(t_k),$$

d'espérance $E(Z_n)$.

3. a) Montrer que la suite $(E(Z_n)/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$. On utilisera la décroissance de p pour encadrer son intégrale sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, puis on sommera ces encadrements. Cette limite sera notée $m(T)$ dans la suite de cette partie.

3. b) Justifier la validité du changement de variable $u = e^{(1-\ell)t}$ dans l'intégrale

$$\int_0^T p(t) dt \text{ et en déduire}$$

$$m(T) = \frac{1}{(1-\ell)T} \int_1^{e^{(1-\ell)T}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1-p_0}{p_0 + (1-p_0)u} \right) du.$$

3. c) En déduire une expression de $m(T)$ en fonction de p_0 , ℓ et T et montrer que, lorsque T tend vers $+\infty$, p_0 et ℓ étant fixés, $m(T)$ est équivalent à $-\frac{\ln(1-p_0)}{(1-\ell)T}$.

Partie IV : Retour au modèle discret

Soit n un entier naturel non nul fixé. Avec les notations des parties I et III, on suppose que $p_0 = 1/3$, $\ell = 1/2$ et $T = 2n(1-\lambda)$. On compare ici les nombres explicitement définis par les deux modèles.

1. Montrer que la fonction p définie dans la partie III est deux fois dérivable sur $[0, T]$ et montrer que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$p''(t) = \frac{1}{4}(2p(t) - 1)p(t)(p(t) - 1),$$

où p'' désigne la dérivée seconde de p .

2. On rappelle que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $t_k = k\delta = kT/n$ et que p_k a été défini dans la partie I. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $\varepsilon_k = p(t_k) - p_k$.

2. a) On admet le résultat particulier suivant : pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$|p(t_{k+1}) - p(t_k) - \delta p'(t_k)| \leq \frac{\delta^2}{8}.$$

2. b) Établir, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, l'égalité

$$p(t_k) + \delta p'(t_k) - p_{k+1} = \varepsilon_k [1 - (1-\lambda)(1 - p(t_k) - p_k)].$$

2. c) En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, l'inégalité

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq \frac{\delta^2}{8} + \frac{\lambda+2}{3} |\varepsilon_k|.$$

2. d) Établir, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'inégalité $|\varepsilon_k| \leq 6(1-\lambda)$.

3. Pour tout réel α tel que $\alpha > 18(1-\lambda)$, on pose

$$N(\alpha) = \frac{1}{1-\lambda} \ln \left(\frac{1}{12} \frac{\alpha}{1-\lambda} - \frac{1}{2} \right).$$

3. a) Vérifier que, pour tout réel $\alpha > 18(1-\lambda)$, $N(\alpha) > 0$.

3. b) Montrer que, si $n \leq N(\alpha)$, alors, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\left| \frac{p(t_k) - p_k}{p(t_k)} \right| \leq \alpha.$$

3. c) Montrer que, pour $\alpha > 0$ fixé, $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} N(\alpha) = +\infty$.

3. d) Conclure sur la qualité de l'approximation du modèle discret par le modèle continu lorsque λ se rapproche de 1.