



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2005

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E .

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*) : f \circ f = 4\text{Id}$. On travaillera sur la matrice M de f dans la base canonique ; l'équation $(*)$ s'écrit alors $M^2 = 4I_n$.

A. Étude du cas $n = 2$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f .
2. On note $F = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$.
 2. a) Montrer que G est engendré par le vecteur u . En déduire la dimension de F et donner une base de F .
 2. b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2 .
3. Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où $n \geq 2$, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation (*).

1. a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f .

1. b) Déterminer les valeurs propres possibles de f .

1. c) Vérifier que 2 Id et -2 Id satisfont l'équation (*).

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2 \text{ Id}$ et $f \neq -2 \text{ Id}$, et on note $F = \text{Ker}(f - 2 \text{ Id})$ et $G = \text{Im}(f - 2 \text{ Id})$.

2. Soit x un élément de E . Montrer que $f(x) - 2x$ appartient à $\text{Ker}(f + 2 \text{ Id})$ et que $f(x) + 2x$ appartient à F . En déduire que $G \subset \text{Ker}(f + 2 \text{ Id})$ et que $\text{Im}(f + 2 \text{ Id}) \subset F$. Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f .

3. Soit x un vecteur de $\text{Ker}(f + 2 \text{ Id})$.

3. a) Exprimer $(f - 2 \text{ Id})(x)$ en fonction de x uniquement. En déduire que x appartient à G , puis que $G = \text{Ker}(f + 2 \text{ Id})$.

3. b) Montrer que f est diagonalisable.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n , dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient à chaque tirage deux boules, une blanche et une noire.

Les choix sont uniformes et indépendants entre les deux urnes. Lorsqu'il y a remise, le tirage suivant est effectué indépendamment des précédents dans l'urne concernée.

On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Pour les questions informatiques, on pourra utiliser `import numpy.random as rd`. La commande `rd.randint(a, b)` renvoie un entier choisi uniformément parmi $a, a + 1, \dots, b - 1$; ses appels successifs simulent des choix indépendants. Une liste Python de longueur n est indexée de 0 à $n - 1$. La commande `print(x)` affiche la valeur de x .

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.
1. a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience. On pourra prendre comme issues les suites finies de résultats s'arrêtant à la première paire et vérifier que la somme de leurs probabilités est égale à 1.
1. b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages de deux boules effectués. Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.
2. Écrire une fonction Python `pgrm1(n)` qui modélise l'expérience précédente et renvoie le nombre de tirages effectués.
3. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.
3. a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(U = k)$. En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1. Reconnaître la loi de U .

3. b) Déterminer la loi conjointe du couple (U, Z) .

3. c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell.$$

3. d) Calculer $P(Z = 1)$. Montrer que $P(Z = 0) = \frac{1}{3}$.

3. e) En utilisant la formule du triangle de Pascal et le résultat de la question c) pour $k = i + 1$, justifier, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$P(Z = i + 1) = \frac{1}{4}P(Z = i + 1) + \frac{1}{4}P(Z = i).$$

3. f) En déduire la loi de Z .

Partie II. Tirages sans remise

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers

1. Déterminer la loi de X_1 .

2. On suppose dans cette question que $n = 2$. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ? On précisera, pour chaque valeur prise par X_2 , l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir. En déduire la loi de X_2 .

B. Étude du cas général

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

1. a) Décrire l'univers Ω des événements observables.
1. b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles. Pour compter les ordres de sortie d'une urne, on pourra compter successivement les choix du premier numéro, du deuxième, et ainsi de suite.
1. c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n .

Pour tout entier naturel k , on note $a(n, k)$ le cardinal $\text{Card}\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$. Par convention, $a(0, 0) = 1$.

2. a) Préciser la valeur de

$$\sum_{j=0}^n a(n, j).$$

2. b) Déterminer $a(n, n)$ et $a(n, n - 1)$.
3. a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$, l'égalité

$$\frac{a(n, j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j, 0)}{(n-j)!}.$$

On pourra fixer l'ordre de sortie des boules blanches, choisir les j numéros qui forment une paire et compter les façons d'associer les numéros restants sans nouvelle paire.

En déduire la relation

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} = n!.$$

Donner l'expression de $a(n, 0)$ en fonction des nombres $(a(j, 0))_{0 \leq j \leq n-1}$.

3. b) Soit k un entier compris entre 1 et n , et i un entier compris entre 0 et $k - 1$. Justifier l'égalité

$$\binom{j}{i} \binom{k}{j} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i},$$

puis montrer que

$$\sum_{j=i}^k (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = 0.$$

En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j}.$$

4. a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k - 1$, on a les k égalités

$$a(j, 0) = j! \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i!.$$

Montrer l'égalité

$$a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!.$$

On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n, 0)$ trouvée dans la question 3. a).

4. b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k , la valeur de $a(k, 0)$.

4. c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans l'urne blanche et avec remise dans l'urne noire, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

1. a) Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

1. b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n .

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une constante fixée.

2. Définir deux listes Python de n entiers, nommées `blanc` et `noir`. Elles représenteront les numéros des boules obtenues lors des tirages successifs, dans chaque urne.

3. a) Soit s une liste de longueur n . Écrire une fonction `echange(s, i, j)` qui échange les éléments $s[i]$ et $s[j]$ de la liste. Les indices i et j appartiennent à $\{0, \dots, n-1\}$.

3. b) On considère les lignes de programme suivantes utilisant la fonction `echange`.

Python

```
import numpy.random as rd

blanc = [0] * n

for i in range(n):
    blanc[i] = i + 1

for i in range(n - 1):
    j = rd.randint(i, n)
    echange(blanc, i, j)

print()

for i in range(n):
```

```
print(blanc[i], end=" ")
```

Dans la dernière ligne, `end=" "` demande de séparer les valeurs affichées par une espace au lieu d'un retour à la ligne. `print()` affiche un retour à la ligne.

Expliquer le fonctionnement de ce programme et son résultat. On précisera ce qui se passe au premier passage puis au passage d'indice i dans la deuxième boucle `for` et, en particulier, la raison pour laquelle on écrit l'instruction `j = rd.randint(i, n)`.

3. c) Construire une fonction `initialise(s)` permettant de simuler les tirages sans remise et au hasard des n boules numérotées, en mettant dans `s[i]` le numéro de la boule obtenue au tirage de rang $i + 1$. On pourra s'inspirer de la question précédente.
4. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette partie III lorsque $n = 20$, puis de donner la valeur de X_n . Il n'est pas nécessaire de recopier les fonctions `echange` et `initialise`.