



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2005

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont identifiés à leurs colonnes dans la base canonique. Pour la partie B, M désigne la matrice de f ; ainsi $f(x) = Mx$ et $M^2 = 4I_n$. Cette écriture permet de traiter directement les noyaux, images et bases propres de matrices réelles.

A. Étude du cas $n = 2$

1. On calcule le carré de la matrice afin d'utiliser l'équation demandée :

$$A^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4I_2.$$

La matrice A vérifie $A(A/4) = (A/4)A = I_2$; elle est donc inversible. Par conséquent, $f \circ f = 4\text{Id}$, $\text{Ker } f = \{0\}$ et $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

2. a) La matrice $A - 2I_2$ s'écrit

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}.$$

Sa première colonne est $u \neq 0$. Sa deuxième colonne vaut $-(1 + \sqrt{2})u$, car

$$-(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2}, \text{ et } -(1 + \sqrt{2})\sqrt{2} = -2 - \sqrt{2}.$$

L'image est engendrée par les colonnes, d'où $G = \text{Vect}(u)$ et $\dim G = 1$. Le théorème du rang appliqué à $A - 2I_2$ donne $\dim F = 2 - 1 = 1$.

Pour obtenir une base, on résout $(A - 2I_2)^t(x, y) = 0$. La première équation donne $y = (\sqrt{2} - 1)x$, et la seconde est proportionnelle à la première. En particulier,

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est un vecteur non nul de F . Comme $\dim F = 1$, (v) est une base de F .

2. b) On vérifie

$$Au = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} - 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = -2u.$$

Ainsi $G \subset \text{Ker}(A + 2I_2)$. Réciproquement, la première équation de $(A + 2I_2)^t(x, y) = 0$ est $(\sqrt{2} + 2)x + \sqrt{2}y = 0$; son ensemble de solutions est une droite, et il contient u . Il est donc égal à $\text{Vect}(u) = G$. Le sous-espace propre associé à -2 est bien G .

3. Les vecteurs v et u sont propres pour les valeurs distinctes 2 et -2 ; ils sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice A , et par conséquent f , est diagonalisable.

La matrice de passage, dont les colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base exprimés dans la base canonique, est

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Elle vérifie $AP = P \text{diag}(2, -2)$ et donc $P^{-1}AP = \text{diag}(2, -2)$. Avec la convention des coordonnées, $x_{\text{can}} = Px_{(v,u)}$. Les valeurs propres de f sont exactement 2 et -2 , puisque sa matrice dans cette base est diagonale avec ces deux coefficients.

B. Étude du cas général

Question adaptée au programme actuel : l'étude de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est conduite sur sa matrice réelle M , sans critère général de diagonalisation par un polynôme annulateur.

1. a) L'identité $M^2 = 4I_n$ donne $M(M/4) = (M/4)M = I_n$. Ainsi M est inversible, f est un automorphisme et

$$f^{-1} = \frac{1}{4}f.$$

1. b) Si λ est une valeur propre et $x \neq 0$ un vecteur propre associé, alors $Mx = \lambda x$, puis $M^2x = \lambda^2x$. Comme $M^2x = 4x$, on obtient $(\lambda^2 - 4)x = 0$. Le vecteur étant non nul, $\lambda^2 = 4$, d'où $\lambda \in \{-2, 2\}$.

À ce stade, on a seulement déterminé les valeurs possibles : l'une d'elles pourrait ne pas être présente dans le spectre.

1. c) Les deux matrices $2I_n$ et $-2I_n$ ont pour carré $4I_n$. Les applications correspondantes 2Id et -2Id satisfont donc (*).

2. On utilise la factorisation matricielle, licite car M commute avec I_n :

$$(M + 2I_n)(M - 2I_n) = M^2 - 4I_n = 0,$$

$$(M - 2I_n)(M + 2I_n) = 0.$$

Ainsi, pour tout x , $(M - 2I_n)x$ appartient à $\text{Ker}(M + 2I_n)$ et $(M + 2I_n)x$ appartient à $F = \text{Ker}(M - 2I_n)$. On en déduit

$$G \subset \text{Ker}(M + 2I_n) \text{ et } \text{Im}(M + 2I_n) \subset F.$$

L'hypothèse $M \neq 2I_n$ signifie que $M - 2I_n$ n'est pas nulle. Il existe donc x tel que $(M - 2I_n)x \neq 0$. Ce vecteur appartient à $\text{Ker}(M + 2I_n)$: -2 est une valeur propre. De même, $M \neq -2I_n$ fournit un vecteur non nul $(M + 2I_n)y$ dans F : 2 est une valeur propre. Avec 1. b), le spectre est exactement $\{-2, 2\}$.

3. a) Si $x \in \text{Ker}(M + 2I_n)$, alors $Mx = -2x$ et

$$(M - 2I_n)x = -4x.$$

Par linéarité, $x = (M - 2I_n)(-x/4)$, donc $x \in G$. On a établi l'inclusion inverse de celle de la question 2, et ainsi

$$G = \text{Ker}(M + 2I_n).$$

3. b) Méthode 1 — Théorème du rang et réunion de bases propres

Posons $r = \dim F$ et $s = \dim G$. Le théorème du rang appliqué à $M - 2I_n$ donne $r + s = n$. Prenons une base $(v_1, \dots, v_r)$ de F et une base $(w_1, \dots, w_s)$ de G . Les premiers sont propres pour 2 et les seconds pour -2 .

Pour vérifier la liberté de leur réunion, supposons $v + w = 0$, où

$$v = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$$

et

$$w = \sum_{j=1}^s \beta_j w_j.$$

En appliquant M , on obtient $2v - 2w = 0$. Avec $v + w = 0$, cela donne $4v = 0$, puis $v = w = 0$. La liberté de chacune des deux bases entraîne que tous les coefficients sont nuls.

Cette famille libre a $r + s = n$ éléments : c'est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres. La matrice de passage correspondante diagonalise M en $\text{diag}(2I_r, -2I_s)$. Ainsi f est diagonalisable.

Méthode 2 — Construction explicite de vecteurs dans les deux noyaux

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, posons $v = (M + 2I_n)x/4$ et $w = (2I_n - M)x/4$. La question 2 et l'égalité de 3. a) donnent $v \in F$ et $w \in G$, et leur somme est x .

Toute base de F réunie à toute base de G engendre donc $\mathbb{R}^n$. Cette réunion est libre par le calcul $v + w = 0$, $2v - 2w = 0$ effectué ci-dessus. Elle constitue une base propre et diagonalise M .

La première méthode compte les vecteurs par le rang ; la seconde fournit directement, pour chaque colonne x , les deux composantes nécessaires à la construction d'une base propre, sans utiliser de théorème général de décomposition.

Problème

Partie I. Tirages avec remise

1. a) Question adaptée au programme actuel : le modèle est construit sur les résultats observables jusqu'à l'arrêt, sans théorie des espaces produits infinis.

Un résultat d'un tirage est un couple $(b, c) \in \{1, \dots, n\}^2$, où b est le numéro blanc et c le numéro noir. Ces n^2 couples sont équiprobables. L'événement «paire» contient les n couples (b, b) ; sa probabilité est donc $1/n$.

Pour $k \geq 1$, notons Ω_k l'ensemble des mots de k couples dont les $k - 1$ premiers ne sont pas des paires et dont le dernier en est une. On prend

$$\Omega = \bigcup_{k \geq 1} \Omega_k, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \text{ et } P(\{\omega\}) = n^{-2k} \text{ pour } \omega \in \Omega_k.$$

Chaque choix dans chaque urne est indépendant des autres et uniforme, ce qui donne bien cette probabilité pour un mot donné. On a $\text{Card } \Omega_k = n(n^2 - n)^{k-1}$ pour $n \geq 2$, donc

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = 1.$$

Pour $n = 1$, Ω contient seulement le mot $((1, 1))$, de probabilité 1. Dans tous les cas, pour

une partie B de Ω , on définit $P(B)$ par la somme des probabilités de ses issues. La normalisation précédente donne un espace probabilisé et représente une expérience dont l'arrêt est presque sûr.

1. b) Pour $n \geq 2$, les événements «paire au tirage de rang k » sont des succès de probabilité $1/n$ lors d'épreuves indépendantes. Le premier succès a donc pour rang

$$Y \sim \mathcal{G}(1/n), \text{ et } P(Y = k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}, k \geq 1.$$

Les moments de cette loi géométrique existent et valent

$$E(Y) = n, V(Y) = n(n-1).$$

Pour $n = 1$, la première paire est certaine au premier tirage : $P(Y = 1) = 1$, $E(Y) = 1$ et $V(Y) = 0$. Ces valeurs sont cohérentes avec les expressions précédentes.

2. Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

def pgrm1(n):
    nombre = 0
    paire = False
    while not paire:
        blanc = rd.randint(1, n + 1)
        noir = rd.randint(1, n + 1)
        nombre = nombre + 1
        paire = (blanc == noir)
    return nombre
```

Chaque passage simule un tirage indépendant de deux boules avec remise. Le compteur est augmenté même pour le dernier tirage. La variable booléenne *paire* devient vraie exactement à la première égalité et arrête alors la boucle. La fonction renvoie une réalisation de Y . La terminaison est presque sûre d'après 1. b). Pour $n = 1$, elle renvoie toujours 1.

3. a) Les tirages blancs sont indépendants ; à chacun, la probabilité d'obtenir le numéro 1 est $1/2$. Ainsi

$$P(U = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = 2^{-k}, k \geq 1.$$

L'événement « ne jamais obtenir la boule blanche numéro 1 » est contenu, pour tout m , dans l'événement « ne pas l'obtenir pendant les m premiers tirages », de probabilité 2^{-m} . Sa probabilité est donc inférieure ou égale à 2^{-m} pour tout m , et vaut 0. On reconnaît $U \sim \mathcal{G}(1/2)$.

3. b) Conditionnellement à $U = \ell$, les numéros blancs sont 2 aux $\ell - 1$ premiers tirages, puis 1. Les tirages noirs restent indépendants et uniformes sur $\{1, 2\}$, puisque la condition porte uniquement sur les tirages blancs. À chaque rang, la probabilité de correspondre au numéro blanc est $1/2$, et ces correspondances sont indépendantes.

La loi conditionnelle de Z sachant $U = \ell$ est donc $\mathcal{B}(\ell, 1/2)$. Pour $\ell \geq 1$ et $0 \leq k \leq \ell$,

$$P(U = \ell, Z = k) = P(U = \ell)P(Z = k | U = \ell) = 2^{-\ell} \binom{\ell}{k} 2^{-\ell} = \binom{\ell}{k} 4^{-\ell}.$$

La probabilité est nulle pour les autres couples. Ces valeurs décrivent toute la loi conjointe sur $\{(\ell, k) : \ell \geq 1, 0 \leq k \leq \ell\}$.

On peut aussi compter directement : le mot blanc est imposé par $U = \ell$; on choisit les k rangs de paire parmi ℓ , puis chaque numéro noir est imposé. Il existe $\binom{\ell}{k}$ mots de couples correspondants, chacun de probabilité $4^{-\ell}$. Cette lecture explique le coefficient binomial sans recourir à une loi conditionnelle reconnue à l'avance.

3. c) Les événements $\{U = \ell\}$ forment un système complet, puisque U est fini presque sûrement. Pour $k \geq 1$, $Z = k$ impose $U \geq k$. La formule des probabilités totales donne

$$P(Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} P(U = \ell, Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} 4^{-\ell}.$$

Les termes sont positifs et la somme est une probabilité; la série converge donc.

3. d) Pour $k = 1$, on utilise la première série géométrique dérivée, convergente pour $|x| < 1$:

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell x^{\ell-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En prenant $x = 1/4$ puis en multipliant par $1/4$, il vient

$$P(Z = 1) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell 4^{-\ell} = \frac{1/4}{(1-1/4)^2} = \frac{4}{9}.$$

Pour $Z = 0$, la formule conjointe de 3. b) donne

$$P(Z = 0) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \binom{\ell}{0} 4^{-\ell} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

3. e) Fixons $i \geq 1$. La formule de Pascal et le changement d'indice $m = \ell - 1$ donnent

$$\begin{aligned} P(Z = i + 1) &= \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \left[\binom{\ell-1}{i+1} + \binom{\ell-1}{i} \right] 4^{-\ell} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=i}^{+\infty} \binom{m}{i+1} 4^{-m} + \frac{1}{4} \sum_{m=i}^{+\infty} \binom{m}{i} 4^{-m}. \end{aligned}$$

On convient que $\binom{i}{i+1} = 0$; le premier terme commence effectivement à $m = i + 1$. La question 3. c) identifie donc les deux séries à $P(Z = i + 1)$ et $P(Z = i)$. D'où

$$P(Z = i + 1) = \frac{1}{4} P(Z = i + 1) + \frac{1}{4} P(Z = i).$$

La décomposition de ces séries positives et les changements d'indice sont licites dans le cadre des couples discrets ; chaque série représente une probabilité finie.

3. f) La relation précédente équivaut à $P(Z = i + 1) = P(Z = i)/3$ pour $i \geq 1$. Avec $P(Z = 1) = 4/9$, une récurrence donne

$$P(Z = 0) = \frac{1}{3}, \text{ et } P(Z = k) = \frac{4}{3^{k+1}} \text{ pour } k \geq 1.$$

Tous les entiers naturels sont possibles, et ces valeurs sont bien normalisées :

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} + \frac{4/9}{1 - 1/3} = 1.$$

Partie II. Tirages sans remise

A. Étude de cas particuliers

1. Pour $n = 1$, les deux urnes contiennent uniquement leur boule numéro 1. Le seul tirage forme une paire. Ainsi $P(X_1 = 1) = 1$: X_1 suit la loi certaine égale à 1.
2. On représente un résultat par (b, c) , où b et c sont les deux ordres de sortie, blanc et noir. Pour $n = 2$, chacun de ces ordres est $(1, 2)$ ou $(2, 1)$. Les quatre résultats sont équiprobables, de probabilité $1/4$ chacun.

Les deux résultats $((1, 2), (1, 2))$ et $((2, 1), (2, 1))$ donnent deux paires. Les deux résultats $((1, 2), (2, 1))$ et $((2, 1), (1, 2))$ ne donnent aucune paire.

Ainsi X_2 prend exactement les valeurs 0 et 2, avec $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 2) = 1/2$.

B. Étude du cas général

1. a) Une issue est un couple (b, c) de listes contenant chacune une fois tous les entiers de 1 à n . Ces listes donnent les ordres de sortie dans les deux urnes. L'univers Ω est

l'ensemble de tous ces couples d'ordres. Les tirages uniformes indépendants entre urnes rendent toutes ces issues équiprobables.

1. b) Question adaptée au programme actuel : le comptage est guidé par les choix successifs.

Dans une urne, le premier numéro peut être choisi de n façons, le deuxième de $n - 1$ façons, et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui est imposé. Il existe donc $n(n - 1) \cdots 1 = n!$ ordres.

Les deux listes peuvent être choisies indépendamment : $\text{Card } \Omega = (n!)^2$. Chaque issue a pour probabilité $1/(n!)^2$.

1. c) Le nombre de paires appartient à $\{0, \dots, n\}$. Il ne peut pas valoir $n - 1$: si les deux listes coïncident à $n - 1$ rangs, le seul numéro restant est le même dans les deux urnes, donc elles coïncident aussi au dernier rang.

Pour $n \geq 2$, toutes les autres valeurs sont possibles. Fixons $j \leq n - 2$, la liste blanche $(1, \dots, n)$ et la liste noire

$(1, \dots, j, j + 2, j + 3, \dots, n, j + 1)$.

La liste finale de $n - j \geq 2$ numéros est décalée d'une place : aucun de ces derniers rangs ne forme une paire. Le nombre total de paires est exactement j . Le cas $j = 0$ correspond à la liste noire $(2, 3, \dots, n, 1)$. Enfin, deux listes égales donnent n paires.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n - 2, n\}$. Pour $n = 1$, $X_1(\Omega) = \{1\}$.

2. a) Les événements $\{X_n = j\}$ pour $0 \leq j \leq n$ partitionnent l'univers. La somme de leurs cardinaux vaut donc

$$\sum_{j=0}^n a(n, j) = \text{Card } \Omega = (n!)^2.$$

2. b) Pour obtenir n paires, les deux ordres doivent être égaux. Le premier ordre peut être choisi de $n!$ façons et le second est alors imposé, d'où $a(n, n) = n!$.

La valeur $n - 1$ est impossible d'après 1. c), donc $a(n, n - 1) = 0$. Cette dernière formule vaut aussi pour $n = 1$, car $a(1, 0) = 0$.

3. a) Question adaptée au programme actuel : on suit le guidage donné, sans formule générale de dénombrement supplémentaire.

Fixons un ordre blanc. Pour chaque numéro blanc r , notons le numéro noir placé au même rang. Cette association utilise exactement une fois chaque numéro noir. Les paires correspondent exactement aux numéros associés à eux-mêmes. Le nombre d'associations ayant exactement j paires ne dépend donc pas de l'ordre blanc choisi.

Pour exactement j paires, on choisit leurs j numéros de $\binom{n}{j}$ façons. Sur les $m = n - j$ numéros restants, il faut une association sans aucune coïncidence. Notons d_m le nombre de ces associations pour un ordre blanc fixé, avec $d_0 = 1$.

Dans une expérience à m numéros, il existe $m!$ ordres blancs ; chaque ordre admet d_m associations noires sans coïncidence. Ainsi $a(m, 0) = m!d_m$, soit $d_m = a(m, 0)/m!$, y compris pour $m = 0$ grâce à la convention du sujet.

En réintroduisant les $n!$ choix de l'ordre blanc initial, on obtient

$$a(n, j) = n! \binom{n}{j} \frac{a(n - j, 0)}{(n - j)!},$$

ce qui donne la première égalité demandée. En sommant puis en utilisant 2. a),

$$n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{a(n - j, 0)}{(n - j)!} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{a(r, 0)}{r!},$$

où l'on a posé $r = n - j$ et utilisé $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$. L'isolement du terme d'indice n donne la relation de récurrence

$$a(n, 0) = n! \left[n! - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} \right].$$

3. b) Pour $i \leq j \leq k$, la définition factorielle des coefficients binomiaux donne

$$\binom{j}{i} \binom{k}{j} = \frac{j!}{i!(j-i)!} \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{(k-i)!}{(j-i)!(k-j)!} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i}.$$

En posant $r = j - i$, on transforme la somme en

$$\sum_{j=i}^k (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{r=0}^{k-i} (-1)^r \binom{k-i}{r}.$$

Comme $i \leq k-1$, on a $k-i \geq 1$; le binôme de Newton donne pour la dernière somme $(1-1)^{k-i} = 0$. La somme initiale est donc nulle.

Son dernier terme, pour $j = k$, vaut $(-1)^k \binom{k}{i}$. En le retranchant, on obtient

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = (-1)^{k+1} \binom{k}{i}.$$

4. a) Posons $b_j = a(j, 0)/j!$ pour alléger les calculs. La relation de 3. a), au rang k , est

$$b_k = k! - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} b_j.$$

L'hypothèse donne

$$b_j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i!$$

pour $j < k$. En substituant puis en intervertissant deux sommes finies,

$$b_k = k! - \sum_{i=0}^{k-1} i! \sum_{j=i}^{k-1} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}.$$

Par la dernière identité de 3. b), la somme intérieure vaut

$$(-1)^i \sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = (-1)^{k+i+1} \binom{k}{i} = -(-1)^{k-i} \binom{k}{i}.$$

On a utilisé que les exposants $k+i$ et $k-i$ diffèrent de l'entier pair $2i$. Il vient donc

$$b_k = k! + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i! = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!.$$

Le terme ajouté pour $i = k$ est exactement $k!$. En multipliant par $k!$, on obtient bien

$$a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i!.$$

4. b) La formule au rang 0 est vraie puisque $a(0, 0) = 1 = 0! \binom{0}{0} (-1)^0 0!$. La question 4. a) montre qu'elle se transmet au rang suivant sous l'hypothèse de sa validité à tous les rangs précédents. La récurrence établit donc la formule pour chaque entier $k \geq 0$.

On peut la simplifier en utilisant $\binom{k}{i} i! = k! / (k-i)!$, puis en posant $r = k-i$:

$$a(k, 0) = (k!)^2 \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Cette somme est finie ; aucune formule de série ni aucun principe général d'inclusion-exclusion n'est nécessaire.

4. c) Pour $0 \leq j \leq n$, l'équiprobabilité et 3. a) donnent, avec $m = n - j$,

$$P(X_n = j) = \frac{a(n, j)}{(n!)^2} = \frac{a(m, 0)}{j!(m!)^2} = \frac{1}{j!} \sum_{r=0}^{n-j} \frac{(-1)^r}{r!}.$$

La probabilité est nulle en dehors de $\{0, \dots, n\}$. Pour $j = n - 1$, la somme vaut $1 - 1 = 0$; pour $j = n$, elle vaut 1, d'où $P(X_n = n) = 1/n!$.

L'ensemble exact des valeurs possibles est celui déjà construit en 1. c) : $\{0, 1, \dots, n - 2, n\}$ si $n \geq 2$, et $\{1\}$ si $n = 1$. Les probabilités sont positives pour ces valeurs car il existe des issues correspondantes, et leur somme vaut 1 par le comptage de 2. a).

Partie III. Tirages mixtes

1. a) Pour chaque rang $r \in \{1, \dots, n\}$, notons I_r l'indicatrice de l'événement « le tirage de rang r forme une paire ». On a

$$X_n = \sum_{r=1}^n I_r.$$

Fixons un ordre blanc $b = (b_1, \dots, b_n)$. Conditionnellement à cet ordre, les numéros noirs sont indépendants, uniformes sur $\{1, \dots, n\}$, et

$$P(I_r = 1 \mid b) = P(\text{noir de rang } r = b_r) = 1/n.$$

Pour $n \geq 2$ et n'importe quelle configuration de k succès et $n - k$ échecs aux rangs prescrits, la probabilité conditionnelle est

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

Elle ne dépend pas de l'ordre blanc. En sommant sur tous les ordres blancs, la probabilité non conditionnelle conserve cette expression. Les indicatrices sont donc mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

Ainsi $X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/n)$. Pour $n = 1$, l'unique tirage est une paire certaine ; on obtient également la loi $\mathcal{B}(1, 1)$.

1. b) Les moments de la loi binomiale sont finis. En appliquant les formules du cours,

$$E(X_n) = n \frac{1}{n} = 1, \quad V(X_n) = n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ces résultats comprennent $n = 1$, pour lequel la variance est nulle.

2. Code adapté en Python. Il n'est pas nécessaire de déclarer un type de tableau : deux listes initialisées avec n zéros conviennent.

Python

```
blanc = [0] * n
noir = [0] * n
```

Il s'agit de deux listes distinctes. Leurs éléments aux indices $0, \dots, n - 1$ seront remplacés par les numéros des boules lors des simulations.

3. a) Code adapté en Python.

Python

```
def echange(s, i, j):
    temporaire = s[i]
    s[i] = s[j]
    s[j] = temporaire
```

La sauvegarde de la valeur initiale de $s[i]$ permet de remplacer les deux éléments sans perdre cette valeur. La liste est modifiée directement ; aucun résultat n'a besoin d'être renvoyé. Le code reste correct si $i == j$: la liste demeure identique.

3. b) Code adapté en Python. La première boucle range les valeurs $1, \dots, n$ dans la liste blanc. La seconde effectue un mélange en fixant successivement les premières places.

Au premier passage, l'indice est $i = 0$. La commande `rd.randint(0, n)` choisit uniformément l'une des n places ; l'échange place donc un numéro uniforme entre 1 et n au premier rang.

Au passage d'indice i , les places d'indices $0, \dots, i - 1$ sont définitivement fixées. Les places d'indices $i, \dots, n - 1$ contiennent exactement les numéros encore disponibles. La commande `rd.randint(i, n)` choisit uniformément l'une de ces $n - i$ places. L'échange choisit donc la boule suivante uniformément parmi celles qui n'ont pas encore été tirées, sans modifier les rangs déjà fixés.

La borne supérieure exclusive n autorise le dernier indice $n - 1$. La borne inférieure i est essentielle : une place antérieure correspondrait à une boule déjà sortie. La boucle s'arrête à $i = n - 2$, car le dernier numéro est alors imposé.

Pour un ordre prescrit, la probabilité de l'obtenir est $\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{2} = 1/n!$: tous les ordres sont équiprobables. Le programme affiche donc un ordre de sortie simulé de l'urne blanche sans remise, après un retour à la ligne. Pour $n = 1$, la deuxième boucle est vide et la liste affichée est simplement `[1]`.

3. c) Code adapté en Python.

Python

```
import numpy.random as rd

def initialise(s):
    n = len(s)
    for i in range(n):
        s[i] = i + 1
    for i in range(n - 1):
        j = rd.randint(i, n)
        echange(s, i, j)
```

La fonction remplit d'abord la liste avec les numéros de l'urne, puis applique exactement le mélange étudié en 3. b). À son retour, `s[i]` donne le numéro de la boule sortie au rang $i + 1$. La fonction `echange` de 3. a) doit avoir été définie auparavant. Les tirages simulés sont sans remise et uniformes parmi les ordres possibles.

4. Code adapté en Python. Les fonctions `echange` et `initialise` des questions précédentes étant définies, le programme est :

Python

```
import numpy.random as rd

n = 20

blanc = [0] * n
noir = [0] * n

initialise(blanc)

nombre_paires = 0

for i in range(n):
    noir[i] = rd.randint(1, n + 1)
    if blanc[i] == noir[i]:
        nombre_paires = nombre_paires + 1

print(nombre_paires)
```

L'appel `initialise(blanc)` simule l'urne blanche sans remise. Chaque appel `rd.randint(1, n + 1)` choisit indépendamment un numéro noir de 1 à n , ce qui simule la remise dans l'urne noire. Chaque égalité incrémente le compteur une fois. La valeur affichée est donc une réalisation de X_{20} , qui suit $\mathcal{B}(20, 1/20)$ d'après III.1. Elle appartient à $\{0, \dots, 20\}$.

Les blocs Python ont été exécutés, avec les fonctions requises et des valeurs admissibles de n , y compris $n = 1$. Les simulations vérifient le fonctionnement des programmes ; la loi exacte est démontrée en III.1.

Relevé des adaptations

- Exercice B.1 à B.3 : la matrice réelle M de f est explicitée afin de traiter les noyaux, images et diagonalisation dans le cadre matriciel du programme ; toutes les questions et leurs objectifs sont conservés.

- Problème I.1.a : indication d'un univers dénombrable de suites arrêtées à la première paire, pour construire directement le modèle sans théorie des espaces produits infinis. Les conventions d'uniformité et d'indépendance des tirages sont explicitées dans le préambule du problème.
- Problème I.2 et III.2 à III.4 : Code adapté en Python. Les listes utilisent les indices de 0 à $n - 1$; les bornes exclusives de `rd.randint` et les commandes d'affichage sont documentées. La déclaration de type de III.2 est remplacée par l'initialisation des deux listes ; le comportement de l'algorithme est conservé.
- Problème II.B.1.b et II.B.3.a : indications de comptage par choix successifs et par choix des numéros formant une paire, afin de ne supposer aucun chapitre général de dénombrement. Aucun résultat général d'inversion combinatoire n'est utilisé : II.B.4 est démontré par les sommes finies demandées.