



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carrée d'ordre 2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1. a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.
1. b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1} .
1. c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$.

1. d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q , carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

1. e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n .

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p , sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 suivante :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

On note $S(\omega)$, respectivement $D(\omega)$, la plus grande, respectivement la plus petite, valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. a) Montrer que $P(X = Y) = \frac{p}{2-p}$ et en déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega; M(\omega) \text{ est inversible}\}$.
2. b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D .
2. c) Calculer les probabilités $P([S = 2] \cap [D = 0])$, $P(S = 2)$ et $P(D = 0)$. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes?
2. d) Établir, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'égalité $P(S = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.
2. e) En déduire, lorsque $p = \frac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Problème

Partie A : Étude d'une fonction

1. a) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction f de classe C^1 sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$, vérifiant pour tout réel $x \in] -\infty, 0[\cup]0, 1[$ l'égalité

$$x(1-x)f'(x) + (1-x)f(x) = 1.$$

Soit h la fonction définie sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$ par $h(x) = xf(x)$. Montrer que h est de classe C^1 sur chacun de ces intervalles et calculer sa dérivée. En déduire qu'il existe deux constantes réelles c_1 et c_2 vérifiant

$$\forall x \in] -\infty, 0[, \quad h(x) = -\ln(1-x) + c_1,$$

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) = -\ln(1-x) + c_2.$$

1. b) On définit une fonction f sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$ par

$$f(x) = \frac{-\ln(1-x) + c_1}{x} \quad \text{si } x < 0,$$

$$f(x) = \frac{-\ln(1-x) + c_2}{x} \quad \text{si } 0 < x < 1,$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles. Déterminer ces constantes pour que f soit prolongeable par continuité en 0.

2. Dans toute la suite du problème, f désigne la fonction définie sur $] -\infty, 1[$ par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 1.$$

2. a) Établir, pour $x < 1$ et $x \neq 0$, à l'aide du changement de variable affine $t = xs$,

$$\text{l'identité} \quad f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1-xs} ds.$$

Pour $|x| < \frac{1}{2}$ et $s \in [0, 1]$, vérifier l'identité finie

$$\frac{1}{1-xs} = 1 + xs + x^2s^2 + \frac{x^3s^3}{1-xs}.$$

L'intégrer puis majorer en valeur absolue le reste à l'aide de $1 - xs \geq \frac{1}{2}$. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

2. b) En déduire que f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

2. c) Montrer que, pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup]0, 1[$,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} - f(x) \right) \frac{1}{x}.$$

En utilisant le développement limité précédent, montrer que f est de classe C^1 sur

$] -\infty, 1[$. Pour ce calcul, on pourra utiliser l'identité exacte $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$ afin de calculer directement la limite de $f'(x)$ en 0.

3. a) Étudier le signe de la fonction φ définie sur $] -\infty, 1[$ par

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x). \text{ En déduire les variations de } f.$$

3. b) Donner le tableau de variation de f et l'allure de sa représentation graphique en précisant les asymptotes, la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de l'origine.

4. Soit $x \in]0, 1[$.

4. a) Soit h la fonction définie sur $] - \infty, 1[$ par $h(t) = -\ln(1 - t)$. Calculer $h'(t)$, $h''(t)$, puis, pour tout entier naturel n non nul, $h^{(n)}(t)$.

4. b) Justifier, pour tout entier naturel n , l'égalité

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt.$$

On procédera par intégrations par parties sur le segment $[0, x]$ et récurrence. On pourra poser $J_m(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^m}{(1-t)^{m+1}} dt$, remarquer que $J_0(x) = h(x)$ et établir une relation entre $J_m(x)$ et $J_{m-1}(x)$ pour $m \geq 1$.

4. c) Établir, pour tout $t \in [0, x]$, la double inégalité $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$. En déduire, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} \leq x^{n+1} f(x).$$

4. d) Justifier l'égalité

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Dans cette question, f est la fonction définie à la question A.2.

1. a) Soit f_1 la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f_1(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ si $t \neq 1$, et $f_1(1) = 1$. Justifier sa continuité sur $]0, 1]$ et établir, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 f_1(t) dt.$$

1. b) Soit $a \in]0, 1[$. Établir, pour tout entier naturel n ,

$$\int_a^1 t^n \ln t dt = -\frac{a^{n+1} \ln a}{n+1} - \frac{1-a^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^n \ln t dt$ et l'égalité

$$\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

1. c) Soit $a \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'égalité

$$\int_a^1 f_1(t) dt + \sum_{k=0}^n \int_a^1 t^k \ln t dt = \int_a^1 t^{n+1} f_1(t) dt.$$

1. d) Montrer que la fonction $t \mapsto t f_1(t)$ est prolongeable en une fonction h_1 continue sur $[0, 1]$. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f_1(t) dt$ converge et vérifie

$$\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 t^n h_1(t) dt.$$

Pour justifier la convergence à la borne 0, on pourra d'abord utiliser l'identité de la question précédente avec $n = 0$.

1. e) On désigne par M le maximum sur $[0, 1]$ de h_1 . Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^1 f_1(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{M}{n+1}.$$

1. f) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, puis l'égalité

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et on désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{6}{\pi^2} f(t)$ si $t \in [0, 1[$, et $g(t) = 0$ sinon.

On définit également sur $\mathbb{R}$ la fonction k par

$$k(y) = \frac{6}{\pi^2} \frac{ye^{-y}}{1 - e^{-y}} \quad \text{si } y > 0, \quad k(0) = \frac{6}{\pi^2}, \quad k(y) = 0 \quad \text{si } y < 0.$$

2. a) Vérifier que k est une densité de probabilité. Pour calculer son intégrale sur $[0, T]$, avec $T > 0$, on utilisera le changement de variable $t = 1 - e^{-y}$, puis on fera tendre T vers $+\infty$. Vérifier également les limites finies à gauche et à droite en 0.

2. b) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$ ayant pour densité k , et $X = 1 - e^{-Y}$. Vérifier, pour tout $x \in]0, 1[$, l'égalité

$$\int_0^x \ln(1-t) dt = \int_{1-x}^1 \ln t dt.$$

Utiliser alors le résultat de la question B.1.b pour prouver que X possède une espérance et la calculer. On appliquera le théorème de transfert à la variable Y , puis le changement de variable $t = 1 - e^{-y}$ sur un segment avant le passage à la limite.

2. c) Par une méthode analogue, montrer que l'intégrale $\int_0^1 (t-1) \ln(1-t) dt$ vaut $\frac{1}{4}$.

En déduire que X^2 admet une espérance, préciser sa valeur et calculer la variance de X . On pourra utiliser le même changement de variable que dans la question précédente pour appliquer le théorème de transfert.

Partie C : Encadrement d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on désigne par V l'ensemble ouvert défini par

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\}.$$

1. Soit u la fonction de V dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{4}$.

1. a) Montrer que u admet un minimum sur V dont on précisera la valeur, mais n'admet pas de maximum.

1. b) Montrer que u est majorée par $\frac{7}{8}$ sur l'ouvert V .

2. Soit F la fonction définie par

$$F(x, y) = \frac{\ln\left(\frac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\frac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}.$$

2. a) À l'aide des résultats de la partie A, montrer que F est définie sur l'ouvert V et qu'elle y admet un maximum. Préciser la valeur de ce maximum.

2. b) Donner un encadrement de $F(x, y)$ pour tout $(x, y) \in V$.