



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2003

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice

1. a) Si $a = b$, les deux colonnes de A sont identiques. Plus explicitement, le vecteur non

nul $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $Av = 0$. Le noyau de A n'est donc pas réduit au vecteur nul et A n'est pas inversible.

1. b) Méthode 1 — Relation matricielle et inverse

On calcule directement

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - 2aA = (b^2 - a^2)I_2.$$

Si $a \neq b$, l'hypothèse $a, b > 0$ donne $a + b > 0$, donc $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \neq 0$. La relation s'écrit

$$A \frac{A - 2aI_2}{b^2 - a^2} = I_2.$$

Les deux facteurs commutent puisqu'ils sont des combinaisons de A et I_2 ; on a donc aussi le produit inverse égal à I_2 . Ainsi

$$A^{-1} = \frac{A - 2aI_2}{b^2 - a^2} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Déterminant d'ordre deux

Pour une matrice d'ordre 2, le critère d'inversibilité par le déterminant est autorisé. Ici $\det A = a^2 - b^2$, qui est non nul exactement lorsque $a \neq b$ puisque $a + b > 0$. La formule

d'inversion d'une matrice d'ordre 2 redonne l'expression précédente. Cette seconde méthode vérifie l'inverse rapidement ; la première construit l'inverse à partir de la relation demandée et se réutilise pour des matrices de taille supérieure.

1. c) Posons $v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le calcul donne

$$Av_+ = (a+b)v_+, \quad Av_- = (a-b)v_-.$$

Ces vecteurs sont non nuls et indépendants : si $\alpha v_+ + \beta v_- = 0$, alors $\alpha + \beta = \alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$. Ils constituent une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, A est diagonale, de coefficients $a+b$ et $a-b$; ce sont donc toutes ses valeurs propres. Elles sont distinctes car $b > 0$.

1. d) Les deux colonnes de la matrice de passage doivent être des vecteurs propres dans l'ordre imposé par Δ . On choisit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont les deux vecteurs indépendants de la question précédente, donc Q est inversible. Sa première ligne est bien constituée de deux 1. Les identités propres donnent $AQ = Q\Delta$, donc $A = Q\Delta Q^{-1}$.

1. e) On vérifie $Q^2 = 2I_2$, d'où

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, les facteurs $Q^{-1}Q$ se simplifient dans les produits et $A^n = Q\Delta^n Q^{-1}$.

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}.$$

Cette formule reste valable si $a = b$: la diagonalisation ne demandait pas l'inversibilité de A .

2. a) Pour chaque ω , la première question s'applique avec $a = X(\omega) > 0$ et $b = Y(\omega) > 0$.
Ainsi $S = X + Y$, $D = X - Y$, et M est inversible exactement si $X \neq Y$.

Les événements $[X = k, Y = k]$, pour $k \geq 1$, sont disjoints et leur réunion est $[X = Y]$.

L'indépendance et la loi géométrique donnent

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} = \frac{p^2}{1 - q^2}.$$

La série géométrique converge car $0 < q^2 < 1$. Comme $1 - q^2 = p(2 - p)$,

$$P(X = Y) = \frac{p}{2 - p}, \quad P(M \text{ inversible}) = 1 - \frac{p}{2 - p} = \frac{2(1 - p)}{2 - p}.$$

2. b) Les variables géométriques X et Y ont un moment d'ordre 2, une espérance $1/p$ et une variance q/p^2 . Les inégalités $(X + Y)^2 \leq 2X^2 + 2Y^2$ et $(X - Y)^2 \leq 2X^2 + 2Y^2$ justifient l'existence de la covariance de S et D .

Méthode 1 — Bilinéarité de la covariance

$$\text{Cov}(S, D) = \text{Cov}(X + Y, X - Y) = V(X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - V(Y).$$

Les termes croisés se compensent et $V(X) = V(Y)$; la covariance cherchée vaut donc 0.

Méthode 2 — Produit et symétrie des moments

On a $SD = X^2 - Y^2$, qui est intégrable puisque $|X^2 - Y^2| \leq X^2 + Y^2$. Les variables X et Y ayant la même loi, $E(SD) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$. De plus, $E(D) = E(X) - E(Y) = 0$. Par définition,

$$\text{Cov}(S, D) = E(SD) - E(S)E(D) = 0.$$

La première méthode convient aux combinaisons linéaires; la seconde exploite ici la factorisation du produit et l'égalité des lois.

2. c) Comme $X, Y \geq 1$, l'événement $[S = 2]$ est exactement $[X = 1, Y = 1]$ et entraîne $D = 0$. Ainsi

$$P([S = 2] \cap [D = 0]) = p^2, \quad P(S = 2) = p^2, \quad P(D = 0) = \frac{p}{2-p}.$$

Puisque $0 < p < 1$, on a $p/(2-p) < 1$ et donc

$$P(S = 2)P(D = 0) = p^2 \frac{p}{2-p} < p^2 = P([S = 2] \cap [D = 0]).$$

Les variables S et D ne sont pas indépendantes, bien que leur covariance soit nulle.

2. d) Pour $n \geq 2$, on décompose l'événement $[X + Y = n]$ suivant les $n - 1$ valeurs possibles $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ de X . Par indépendance,

$$P(S = n) = \sum_{k=1}^{n-1} p q^{k-1} p q^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = (n-1) p^2 q^{n-2}.$$

Ces événements sont disjoints et couvrent toutes les possibilités, ce qui justifie la somme. Pour $n < 2$, $P(S = n) = 0$.

2. e) Notons $a_n = P(S = n) > 0$ pour $n \geq 2$. Lorsque $p = 2/21$, on a $q = 19/21$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{19n}{21(n-1)}.$$

Le dénominateur est positif. Ce quotient est supérieur à 1 exactement si $19n > 21n - 21$, soit $n < 21/2$. Ainsi $a_2, \dots, a_{11}$ sont strictement croissants, puis la suite est strictement décroissante à partir de a_{11} . Il n'y a pas d'égalité entre deux termes consécutifs puisque $21/2$ n'est pas entier. La valeur la plus probable de S est donc, de façon unique, 11.

Problème

Partie A : Étude d'une fonction

1. a) Sur chacun des deux intervalles, le produit $h(x) = x f(x)$ est de classe C^1 et

$$h'(x) = f(x) + x f'(x).$$

L'équation donnée se réécrit $(1-x)(x f'(x) + f(x)) = 1$. Puisque $x < 1$, on peut diviser par $1-x$ et obtenir $h'(x) = 1/(1-x)$. La fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est une primitive de ce second membre. Sur chaque intervalle, la différence de deux primitives est constante. Il existe donc $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$h(x) = -\ln(1-x) + c_1 \quad (x < 0), \quad h(x) = -\ln(1-x) + c_2 \quad (0 < x < 1).$$

Les constantes peuvent être différentes car les deux intervalles sont disjoints.

1. b) Si f admet une limite finie en 0, alors $xf(x) \rightarrow 0$ sur chacun des côtés. Or $-\ln(1-x) \rightarrow 0$: les expressions de $xf(x)$ imposent donc $c_1 = c_2 = 0$.

Réciproquement, si les deux constantes sont nulles, la dérivabilité de $x \mapsto -\ln(1-x)$ en 0 donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1-x)}{x} = 1.$$

Le prolongement continu existe donc exactement pour $c_1 = c_2 = 0$ et il est défini par $f(0) = 1$.

2. a) Question adaptée au programme actuel : le développement d'ordre supérieur demandé dans la source est remplacé par une identité finie et un encadrement du reste, pour obtenir directement le développement d'ordre 2 de f .

Pour $x < 1$, $x \neq 0$, la fonction $1/(1-t)$ est continue sur le segment d'extrémités 0 et x . Le changement de variable affine $t = xs$, en tenant compte du signe de x dans les bornes, donne

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = x \int_0^1 \frac{ds}{1-xs}.$$

La division par x établit l'identité demandée. Pour $x = 0$, son second membre vaut aussi $1 = f(0)$.

La multiplication de $1 + xs + x^2s^2$ par $1 - xs$ donne $1 - x^3s^3$. L'identité géométrique finie annoncée est donc exacte. Son intégration donne, pour $|x| < 1/2$,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + R(x), \quad R(x) = x^3 \int_0^1 \frac{s^3}{1-xs} ds.$$

Comme $1 - xs \geq 1/2$,

$$|R(x)| \leq 2|x|^3 \int_0^1 s^3 ds = \frac{|x|^3}{2}.$$

Il en résulte $R(x)/x^2 \rightarrow 0$ et, finalement,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Aucune dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre n'intervient.

2. b) Le développement précédent donne $f(x) \rightarrow 1 = f(0)$, donc la continuité en 0. De plus,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

La dérivée en 0 existe et $f'(0) = 1/2$.

2. c) Sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$, les fonctions du quotient définissant f sont de classe C^1 et le dénominateur ne s'annule pas. La règle du quotient donne

$$f'(x) = \frac{x/(1-x) + \ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1-x} - f(x) \right).$$

Question adaptée au programme actuel : l'identité exacte fournie guide le calcul de la limite, sans technique de calcul de développements limités à supposer connue.

Écrivons $f(x) = 1 + x/2 + x^2/3 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$. Alors

$$f'(x) = \frac{1}{2} + x \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} - \varepsilon(x) \right).$$

La parenthèse est bornée au voisinage de 0, donc $f'(x) \rightarrow 1/2 = f'(0)$. La dérivée existe déjà en 0 par la question précédente et elle est continue en ce point. Ailleurs, sa continuité résulte de sa formule. Ainsi f est de classe C^1 sur $] -\infty, 1[$.

3. a) La fonction φ est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Elle est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1[$. Puisque $\varphi(0) = 0$, elle est strictement positive pour $x \neq 0$. D'après la formule précédente, $f'(x) = \varphi(x)/x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, et $f'(0) = 1/2 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur tout $] -\infty, 1[$.

3. b) Pour la limite en $-\infty$, posons $r = -x \rightarrow +\infty$. On a $f(x) = \ln(1+r)/r$. Comme $\ln(1+r)/\ln r \rightarrow 1$ et $\ln r/r \rightarrow 0$, cette limite vaut 0. La courbe admet l'asymptote horizontale $y = 0$ au voisinage de $-\infty$ et reste au-dessus, car $f(x) > 0$ pour $x < 0$.

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, $-\ln(1-x) \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. La droite $x = 1$ est une asymptote verticale.

x	$-\infty$	0	1^-
Signe de f'	+	+	+
Variation de f	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

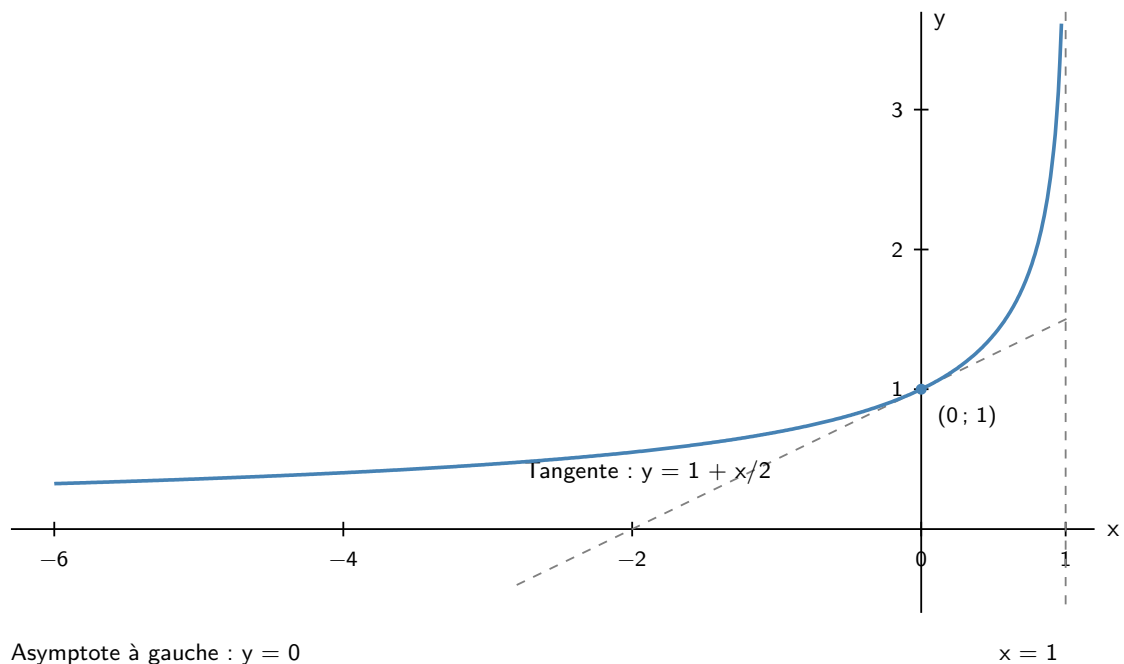
Au point d'abscisse 0, la courbe passe par $(0, 1)$ et sa tangente est $y = 1 + x/2$. Le développement de A.2 donne

$$f(x) - 1 - \frac{x}{2} = x^2 \left(\frac{1}{3} + \varepsilon(x) \right),$$

avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$. La parenthèse est strictement positive pour x assez proche de 0. La courbe est donc strictement au-dessus de sa tangente dans un voisinage ponctué de ce point.

Le tracé suivant est calculé à partir de la formule exacte de f ; les pointillés représentent la tangente et l'asymptote verticale.

$$f(x) = -\ln(1-x)/x, \text{ avec } f(0) = 1$$



4. a) Par dérivation, $h'(t) = 1/(1-t)$ et $h''(t) = 1/(1-t)^2$ pour $t < 1$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$h^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!}{(1-t)^n}.$$

Le cas $n = 1$ vient d'être vérifié. Si la formule est vraie au rang n , la dérivation de $(1-t)^{-n}$ donne $n(1-t)^{-n-1}$, donc $h^{(n+1)}(t) = n!/(1-t)^{n+1}$. La formule est ainsi démontrée pour tout entier $n \geq 1$.

4. b) Question adaptée au programme actuel : l'identité est établie par intégrations par parties et récurrence, selon l'indication ajoutée au sujet.

Pour $m \geq 0$, posons $J_m(x) = \int_0^x (x-t)^m (1-t)^{-m-1} dt$. Tous les intégrandes sont continus sur $[0, x]$, car $x < 1$, et $J_0(x) = h(x)$.

Pour $m \geq 1$, une primitive de $(1-t)^{-m-1}$ est $(1-t)^{-m}/m$. L'intégration par parties sur $[0, x]$ donne

$$J_m(x) = \left[\frac{(x-t)^m}{m(1-t)^m} \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(1-t)^m} dt = -\frac{x^m}{m} + J_{m-1}(x).$$

Ainsi $J_{m-1}(x) = x^m/m + J_m(x)$. En additionnant ces identités pour $m = 1, \dots, n+1$, les termes intermédiaires se simplifient et l'on obtient

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + J_{n+1}(x),$$

soit exactement l'égalité demandée, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. c) Si $0 \leq t \leq x < 1$, alors $x - t \geq 0$ et $1 - t > 0$. De plus,

$$\frac{x-t}{1-t} \leq x \iff x-t \leq x-xt \iff t(1-x) \geq 0.$$

Les deux inégalités annoncées sont donc établies. On peut écrire

$$J_{n+1}(x) = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^{n+1} \frac{dt}{1-t}.$$

Par positivité et intégration de la majoration précédente,

$$0 \leq J_{n+1}(x) \leq x^{n+1} \int_0^x \frac{dt}{1-t} = x^{n+1} h(x).$$

L'identité de A.4.b, divisée par $x > 0$, donne

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} = \frac{J_{n+1}(x)}{x}.$$

Comme $h(x)/x = f(x)$, on conclut bien que ce reste est compris entre 0 et $x^{n+1}f(x)$.

4. d) Ici $x \in]0, 1[$ est fixé, donc $x^{n+1} \rightarrow 0$ et $f(x)$ est un réel fini. L'encadrement de A.4.c entraîne la convergence des sommes partielles vers $f(x)$. Par définition de la somme d'une série,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = f(x) \quad \text{pour } 0 < x < 1.$$

Il s'agit d'une limite de sommes partielles établie par un reste explicite.

Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. a) Pour $0 < t < 1$, la définition donne $f_1(t) = f(1 - t)$. Cette égalité reste vraie en $t = 1$ puisque $f_1(1) = f(0) = 1$. La continuité de f sur $] -\infty, 1[$ entraîne donc celle de f_1 sur $]0, 1]$.

Pour $0 < x < 1$, on effectue dans l'intégrale sur $[0, x]$ le changement de variable affine $u = 1 - t$. Les bornes deviennent 1 et $1 - x$, et $dt = -du$, d'où

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 f(1-u) du = \int_{1-x}^1 f_1(u) du.$$

Toutes les fonctions sont continues sur les segments utilisés.

1. b) Sur $[a, 1]$, avec $a > 0$, les fonctions considérées sont de classe C^1 . Une intégration par parties, avec $u(t) = \ln t$ et une primitive $v(t) = t^{n+1}/(n+1)$ de t^n , donne

$$\int_a^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} \right]_a^1 - \frac{1}{n+1} \int_a^1 t^n dt,$$

$$\int_a^1 t^n \ln t dt = -\frac{a^{n+1} \ln a}{n+1} - \frac{1 - a^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Lorsque $a \rightarrow 0^+$, les croissances comparées donnent $a^{n+1} \ln a \rightarrow 0$, car $n+1 > 0$. La limite des intégrales sur $[a, 1]$ existe donc et vaut $-1/(n+1)^2$. Cela établit la convergence de l'intégrale à la borne 0. Comme $\ln t \leq 0$ sur $]0, 1]$, l'intégrale de la valeur absolue vaut $1/(n+1)^2$ et converge également.

1. c) Pour $a \leq t < 1$, la somme géométrique finie et la relation $(t-1)f_1(t) = \ln t$ donnent

$$\sum_{k=0}^n t^k \ln t = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} \ln t = -(1 - t^{n+1})f_1(t).$$

Donc

$$f_1(t) + \sum_{k=0}^n t^k \ln t = t^{n+1} f_1(t).$$

Cette identité est aussi vraie en $t = 1$, où les termes logarithmiques sont nuls et $f_1(1) = 1$. Les fonctions étant continues sur $[a, 1]$, on intègre l'identité et on utilise la linéarité pour une somme finie. On obtient

$$\int_a^1 f_1(t) dt + \sum_{k=0}^n \int_a^1 t^k \ln t dt = \int_a^1 t^{n+1} f_1(t) dt.$$

1. d) Question adaptée au programme actuel : l'indication avec $n = 0$ accompagne le traitement de la borne 0.

Pour $0 < t < 1$, $tf_1(t) = t \ln t / (t - 1)$. Lorsque $t \rightarrow 0^+$, le numérateur tend vers 0 par croissances comparées et le dénominateur tend vers -1 . On définit donc $h_1(0) = 0$ et $h_1(t) = tf_1(t)$ pour $0 < t \leq 1$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$, en particulier en 1 puisque f_1 l'est.

L'identité de B.1.c pour $n = 0$ se réécrit

$$\int_a^1 f_1(t) dt = \int_a^1 h_1(t) dt - \int_a^1 \ln t dt.$$

Le premier terme admet une limite finie lorsque $a \rightarrow 0^+$ par continuité de h_1 sur $[0, 1]$, et le second en admet une par B.1.b. L'intégrale de f_1 converge donc.

Pour n fixé, on peut maintenant faire tendre a vers 0 dans l'identité de B.1.c : chaque intégrale logarithmique converge par B.1.b et $t^{n+1} f_1(t) = t^n h_1(t)$ est continue sur $[0, 1]$. Il vient

$$\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 t^n h_1(t) dt.$$

1. e) La fonction h_1 est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle y atteint un maximum fini M . Elle est positive ou nulle : $t \geq 0$ et $f_1(t) > 0$ pour $0 < t \leq 1$. Ainsi $0 \leq h_1(t) \leq M$ et

$$0 \leq \int_0^1 t^n h_1(t) dt \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}.$$

En remplaçant l'intégrale du milieu par son expression de B.1.d, on obtient l'encadrement demandé.

1. f) Notons $I = \int_0^1 f_1(t) dt$, réel fini d'après B.1.d. L'encadrement précédent donne

$$\left| I - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \right| \leq \frac{M}{n+1} \rightarrow 0.$$

Les sommes partielles de la série de terme général $1/n^2$, pour $n \geq 1$, convergent donc vers I . Cette preuve par le reste ne demande aucun critère général supplémentaire.

D'après B.1.a, pour $0 < x < 1$,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 f_1(t) dt.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, le second membre tend vers I . Cela prouve directement la convergence de l'intégrale de f à la borne 1 et donne

$$\int_0^1 f(t) dt = I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. a) Question adaptée au programme actuel : la fonction g de la source reste un auxiliaire de calcul. La variable à densité étudiée est définie à l'aide de k , dont les limites latérales sont finies en tout point réel.

La fonction k est positive ou nulle, continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme $1 - e^{-y} \sim y$ lorsque $y \rightarrow 0^+$ et $e^{-y} \rightarrow 1$,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} k(y) = \frac{6}{\pi^2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} k(y) = 0.$$

Ces deux limites sont finies. La valeur $k(0) = 6/\pi^2$ rend même la restriction à $[0, +\infty[$ continue en 0. En tout autre point, la continuité entraîne l'existence de limites latérales finies.

Pour $T > 0$, on utilise sur $[0, T]$ le changement de variable indiqué, $t = 1 - e^{-y}$, qui est de classe C^1 et strictement croissant. Pour $y > 0$, on a $-\ln(1 - t) = y$, $t = 1 - e^{-y}$, et $dt = e^{-y} dy$. En prolongeant les intégrandes par leurs valeurs en 0, il vient

$$\int_0^T k(y) dy = \frac{6}{\pi^2} \int_0^{1-e^{-T}} f(t) dt.$$

Lorsque $T \rightarrow +\infty$, la borne $1 - e^{-T}$ tend vers 1. La convergence établie en B.1.f et la somme donnée au sujet entraînent

$$\int_0^{+\infty} k(y) dy = \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{6}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = 1.$$

Puisque $k = 0$ sur $] -\infty, 0[$, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Les conditions de positivité, de continuité sauf éventuellement en un point, de limites latérales finies et de normalisation sont vérifiées : k est une densité de probabilité dans le cadre demandé.

2. b) Question adaptée au programme actuel : on étudie $X = 1 - e^{-Y}$ par transfert à partir de la densité k de Y .

Pour $0 < x < 1$, le changement affine $u = 1 - t$ donne sur un segment

$$\int_0^x \ln(1 - t) dt = \int_{1-x}^1 \ln u du.$$

D'après B.1.b avec $n = 0$, le second membre tend vers -1 lorsque $x \rightarrow 1^-$. Par conséquent,

$$\int_0^1 \ln(1 - t) dt = -1.$$

La fonction $y \mapsto 1 - e^{-y}$ est continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, 1[$. Le produit $(1 - e^{-y})k(y)$ est positif et majoré par la densité k , dont l'intégrale vaut 1. Son intégrale converge donc absolument, ce qui justifie par le théorème de transfert l'existence de $E(X)$.

Sur $[0, T]$, avec le même changement de variable que dans B.2.a,

$$\int_0^T (1 - e^{-y})k(y) dy = \frac{6}{\pi^2} \int_0^{1-e^{-T}} tf(t) dt.$$

Pour $0 < t < 1$, $tf(t) = -\ln(1-t)$. On passe ensuite à la limite et on utilise l'intégrale calculée ci-dessus :

$$E(X) = -\frac{6}{\pi^2} \int_0^1 \ln(1-t) dt = \frac{6}{\pi^2}.$$

Cette démonstration ne suppose pas que X possède une densité entrant dans le cadre du programme.

2. c) Question adaptée au programme actuel : le moment d'ordre 2 est également obtenu par transfert à partir de Y .

Pour $0 < x < 1$, le changement affine $u = 1 - t$ donne

$$\int_0^x (t-1) \ln(1-t) dt = -\int_{1-x}^1 u \ln u du.$$

La question B.1.b avec $n = 1$ assure que l'intégrale du second membre converge vers $-\int_0^1 u \ln u du = 1/4$. Ainsi

$$\int_0^1 (t-1) \ln(1-t) dt = \frac{1}{4}.$$

Comme $0 \leq (1 - e^{-y})^2 \leq 1$, l'intégrale de $(1 - e^{-y})^2 k(y)$ converge absolument. Le transfert justifie donc l'existence de $E(X^2)$. Le changement de variable effectué d'abord sur $[0, T]$, puis le passage à la limite, donnent

$$E(X^2) = \frac{6}{\pi^2} \int_0^1 t^2 f(t) dt = -\frac{6}{\pi^2} \int_0^1 t \ln(1-t) dt.$$

On utilise l'égalité $t = (t-1) + 1$ et la linéarité de deux intégrales convergentes :

$$\int_0^1 t \ln(1-t) dt = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Il s'ensuit

$$E(X^2) = \frac{9}{2\pi^2}, \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{9}{2\pi^2} - \frac{36}{\pi^4}.$$

La variance est bien définie puisque le moment d'ordre 2 est fini. Son expression vaut environ 0.0864, ce qui est positif.

Partie C : Encadrement d'une fonction de deux variables

1. a) La fonction u est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, en particulier sur l'ouvert V . Son gradient et sa hessienne sont

$$\nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ 2(1+x)y \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 u(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2(1+x) \end{pmatrix}.$$

Sur V , $1+x > 1/2 > 0$. L'équation $2(1+x)y = 0$ impose donc $y = 0$, puis $2x + y^2 = 0$ impose $x = 0$. Il existe un unique point critique, $(0, 0)$.

La hessienne en ce point est $2I_2$. Ses deux valeurs propres valent $2 > 0$: le critère du programme fournit un minimum local strict.

Pour établir qu'il est global, il faut un argument supplémentaire. Or

$$u(x, y) - \frac{1}{4} = x^2 + (1+x)y^2 \geq 0,$$

avec égalité exactement si $x = y = 0$, puisque $1+x > 0$. Ainsi u admet sur V un minimum global strict de valeur $1/4$, atteint uniquement en $(0, 0)$.

Enfin, pour tout $(x, y) \in V$, on peut choisir un réel z tel que $|y| < |z| < 1/2$. Le point (x, z) appartient encore à V et

$$u(x, z) - u(x, y) = (1+x)(z^2 - y^2) > 0.$$

Aucun point de V ne peut donc réaliser un maximum de u .

1. b) Pour $(x, y) \in V$, on a $x^2 < 1/4$, $y^2 < 1/4$ et $0 < 1 + x < 3/2$. Par conséquent,

$$u(x, y) = \frac{1}{4} + x^2 + (1+x)y^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{1}{4} = \frac{7}{8}.$$

La fonction est donc majorée par $7/8$, et même strictement inférieure à cette borne. Cette borne est optimale : en prenant $x_m = y_m = 1/2 - 1/m$ pour $m \geq 2$, les points restent dans V et la continuité du polynôme sur $\mathbb{R}^2$ donne $u(x_m, y_m) \rightarrow 7/8$. Le supremum vaut $7/8$, mais il n'est pas atteint.

2. a) Les deux questions précédentes donnent $1/4 \leq u(x, y) < 7/8$ sur V . Ainsi $u(x, y) > 0$ et $1 - u(x, y) > 1/8 > 0$; le dénominateur de F ne s'annule pas et l'argument du logarithme est positif. La fonction F est bien définie, et même de classe C^2 , sur l'ouvert V .

En utilisant la définition de f , on reconnaît

$$F(x, y) = \frac{\ln(1 - u(x, y))}{u(x, y)} = -f(u(x, y)).$$

Pour préciser la nature locale de l'extremum avec la méthode hessienne, calculons les dérivées partielles. Comme u prend ses valeurs dans $]0, 1[$, f y est de classe C^2 et $f'(u) > 0$ d'après A.3.a. Ainsi

$$\nabla F(x, y) = -f'(u(x, y)) \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ 2(1+x)y \end{pmatrix}.$$

Le seul point critique de F est donc $(0, 0)$. En dérivant ces expressions une seconde fois et en utilisant $\partial_1 u(0, 0) = \partial_2 u(0, 0) = 0$, on obtient

$$\nabla^2 F(0, 0) = -f'(1/4) \nabla^2 u(0, 0) = -2f'(1/4) I_2.$$

Ses deux valeurs propres valent $-2f'(1/4) < 0$. Le point $(0, 0)$ est donc un maximum local strict de F .

Pour le caractère global, on utilise la croissance stricte de f établie en A.3.a :

$u(x, y) \geq 1/4$ entraîne

$$F(x, y) = -f(u(x, y)) \leq -f(1/4) = 4 \ln \left(\frac{3}{4} \right).$$

L'égalité est réalisée exactement lorsque $u(x, y) = 1/4$, donc uniquement en $(0, 0)$. La valeur du maximum global strict est $4 \ln(3/4)$.

2. b) Puisque f est strictement croissante et $1/4 \leq u(x, y) < 7/8$,

$$-f(7/8) < F(x, y) \leq -f(1/4).$$

Le calcul aux deux bornes donne $-f(7/8) = \frac{8}{7} \ln(1/8) = -\frac{24}{7} \ln 2$ et $-f(1/4) = 4 \ln(3/4)$. Ainsi

$$-\frac{24}{7} \ln 2 < F(x, y) \leq 4 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \quad \text{pour tout } (x, y) \in V.$$

La borne supérieure est atteinte en $(0, 0)$. La borne inférieure est l'infimum : avec la suite (x_m, y_m) de C.1.b, $u(x_m, y_m) \rightarrow 7/8$, puis la continuité de f en $7/8 < 1$ donne $F(x_m, y_m) \rightarrow -f(7/8)$. Elle n'est jamais atteinte sur V .

Relevé des adaptations

- A.2.a : remplacement du développement du logarithme à un ordre supérieur à 2 par une identité géométrique finie intégrée avec encadrement explicite du reste ; le développement d'ordre 2 de f et toutes ses utilisations sont conservés.
- A.2.c : indication d'une identité exacte pour guider le calcul de la limite de f' , sans supposer les techniques de calcul des développements limités.
- A.4.b : indication par intégrations par parties et récurrence pour démontrer l'identité particulière demandée, sans supposer une formule générale de Taylor avec reste intégral.
- B.1.d : indication avec $n = 0$ pour établir directement la convergence à la borne singulière 0 à partir de l'intégrale logarithmique déjà calculée.

- B.2.a-c : la fonction source $g(t) = 6f(t)/\pi^2$ sur $[0, 1[$ a une limite infinie en 1^- , alors que le programme limite l'étude aux densités à limites latérales finies en tout point réel. Elle est conservée comme fonction auxiliaire ; la densité étudiée est $k(y) = 6ye^{-y}/(\pi^2(1 - e^{-y}))$ sur $]0, +\infty[$, prolongée en 0, et $X = 1 - e^{-Y}$ est étudiée par transfert à partir de Y . Le changement de variable non affine est indiqué. La normalisation, les intégrales demandées, l'espérance et la variance finales sont conservées exactement.