



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2002

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE I

On travaille dans $E = M_2(\mathbb{R})$, de base (U_1, U_2, U_3, U_4) . La colonne des coordonnées de

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ dans cette base est } {}^t \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}.$$

1. a) Il s'agit de reconnaître un noyau d'application linéaire. Pour tous $M, N \in E$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité des produits matriciels donne

$$\varphi_{A,B}(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)B = \alpha(AM - MB) + \beta(AN - NB).$$

Ainsi $\varphi_{A,B}$ est linéaire, et ses valeurs appartiennent à E : c'est un endomorphisme de E .
De plus,

$$M \in V_{A,B} \iff AM - MB = 0 \iff M \in \text{Ker}(\varphi_{A,B}).$$

Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Donc

$V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B})$ est un sous-espace vectoriel de E .

1. b) Calculons d'abord l'image d'une matrice quelconque, ce qui fournira simultanément les quatre colonnes de la matrice cherchée. Pour les matrices A et B de cette question,

$$AM = \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ -x + z & -y + t \end{pmatrix}, \quad MB = \begin{pmatrix} -x + 2y & y \\ -z + 2t & t \end{pmatrix}.$$

Par soustraction,

$$\varphi_{A,B}(M) = \begin{pmatrix} 2x - 2y - z & -t \\ -x + 2z - 2t & -y \end{pmatrix}.$$

La matrice représentative dans la base donnée est donc

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer son inversibilité, on résout le système homogène, sans calcul de déterminant. Si $K^t \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} = 0$, les deuxième et quatrième lignes donnent $t = 0$ et $y = 0$. Les deux autres deviennent

$$2x - z = 0, \quad -x + 2z = 0.$$

La première donne $z = 2x$, puis la seconde $3x = 0$. Ainsi $x = z = 0$. Le noyau de K est donc réduit à 0; une matrice carrée à noyau nul est inversible.

Il en résulte que $\varphi_{A,B}$ a un noyau nul et, par 1.a, que $V_{A,B} = \{0\}$.

2. a) Comme les deux matrices sont diagonales, les produits se calculent directement :

$$DM = \begin{pmatrix} x & y \\ rz & rt \end{pmatrix}, \quad M\Delta = \begin{pmatrix} x & sy \\ z & st \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'équivalence

$$M \in V_{D,\Delta} \iff (1-s)y = 0, (r-1)z = 0, (r-s)t = 0.$$

Les hypothèses $s \neq 1$, $r \neq 1$ et $r \neq s$ permettent de conclure que ces conditions sont exactement $y = z = t = 0$, sans condition sur x .

2. b) D'après 2.a,

$$V_{D,\Delta} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(U_1).$$

Comme $U_1 \neq 0$, la famille (U_1) est libre et génératrice. C'est donc une base de $V_{D,\Delta}$, qui est de dimension 1.

3. a) Posons $r = a - b$. On cherche deux vecteurs propres explicites. Les sommes des coefficients de chaque ligne de A étant égales à 1,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$A \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a-1) + (1-a)b \\ b(a-1) + (1-b)b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b)(a-1) \\ (a-b)b \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}.$$

Le premier vecteur est non nul et le second aussi, puisque $b \neq 0$. Ce sont des vecteurs

propres associés aux valeurs propres distinctes 1 et r , car $a - b \neq 1$. Ils forment donc une famille libre, puis une base de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

est inversible et la relation obtenue colonne par colonne est

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par P^{-1} , on obtient $D = P^{-1}AP$, avec $D = \text{diag}(1, r)$ et $r = a - b$.

Enfin, une matrice semblable à A a les mêmes valeurs propres. Pour la matrice diagonale D , l'équation $DX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ impose $\lambda = 1$ ou $\lambda = r$. Les deux valeurs propres de A sont donc exactement 1 et $a - b$.

3. b) Le même calcul, avec c et d , donne

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} c-1 \\ d \end{pmatrix} = (c-d) \begin{pmatrix} c-1 \\ d \end{pmatrix}.$$

Le second vecteur est non nul car $d \neq 0$, et $c - d \neq 1$. Ces vecteurs propres sont donc indépendants. La matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & c-1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

est inversible et vérifie $BQ = Q\Delta$, où $\Delta = \text{diag}(1, s)$ avec $s = c - d$. Donc $\Delta = Q^{-1}BQ$.

Les hypothèses de la question 2 sont satisfaites : $r \neq 1$, $s \neq 1$ et $r \neq s$, cette dernière inégalité venant de $a - b \neq c - d$.

3. c) On utilise les deux changements de base déjà construits. Puisque $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$, on a

$$AM = MB \iff PDP^{-1}M = MQ\Delta Q^{-1}.$$

Les matrices P et Q étant inversibles, on peut multiplier à gauche par P^{-1} et à droite par Q . Cela donne

$$AM = MB \iff D(P^{-1}MQ) = (P^{-1}MQ)\Delta \iff P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}.$$

D'après 2.b, ceci équivaut à l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $P^{-1}MQ = \alpha U_1$, donc à $M = \alpha PU_1 Q^{-1}$. Ainsi

$$V_{A,B} = \text{Vect}(PU_1 Q^{-1}).$$

La matrice $PU_1 Q^{-1}$ n'est pas nulle, car son annulation entraînerait celle de U_1 après multiplication par P^{-1} et Q . Elle constitue donc, à elle seule, une base.

On peut donner cette base explicitement. Puisque $1 - c + d = 1 - s \neq 0$, la multiplication directe permet de vérifier

$$Q^{-1} = \frac{1}{1-c+d} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$PU_1Q^{-1} = \frac{1}{1-c+d} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ d & 1-c \end{pmatrix}.$$

On peut donc retenir la base $\left(\begin{pmatrix} d & 1-c \\ d & 1-c \end{pmatrix} \right)$. Cette matrice est non nulle, notamment parce que $d \neq 0$.

4. a) Pour $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a maintenant

$$DM - M\Delta = \begin{pmatrix} (u-v)x & (u-s)y \\ (r-v)z & (r-s)t \end{pmatrix}.$$

Les quatre différences sont non nulles par les hypothèses de l'énoncé. L'égalité $DM = M\Delta$ est donc équivalente à $x = y = z = t = 0$. Ainsi $V_{D,\Delta} = \{0\}$.

4. b) Méthode 1 — Passage aux matrices diagonales

Cette méthode est celle demandée : elle ramène le problème au calcul de 4.a. Puisque A et B sont diagonalisables, il existe des matrices inversibles P, Q et des matrices diagonales $D = \text{diag}(u, r), \Delta = \text{diag}(v, s)$ telles que

$$A = PDP^{-1}, \quad B = Q\Delta Q^{-1}.$$

L'absence de valeur propre commune donne $u \neq v, u \neq s, r \neq v, r \neq s$. Le calcul de 3.c reste donc valable et donne

$$AM = MB \iff P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta} = \{0\} \iff M = 0.$$

Ainsi $V_{A,B} = \{0\}$. Cet argument reste valable si les deux coefficients diagonaux de D , ou ceux de Δ , sont égaux entre eux : seules les différences entre une valeur propre de A et une valeur propre de B interviennent.

Méthode 2 — Action sur une base de vecteurs propres

Cette seconde approche décrit directement l'effet de M sur les vecteurs propres de B . Soit $M \in V_{A,B}$. La diagonalisation de B fournit une base (q_1, q_2) de vecteurs propres, avec $Bq_j = \lambda_j q_j$ pour $j \in \{1, 2\}$. Alors

$$A(Mq_j) = MBq_j = \lambda_j Mq_j.$$

Si Mq_j était non nul, ce serait un vecteur propre de A associé à λ_j , alors que λ_j est une valeur propre de B et qu'aucune n'est commune. On a donc $Mq_1 = Mq_2 = 0$. Une application linéaire nulle sur une base est nulle ; ainsi $M = 0$.

Réciproquement, la matrice nulle vérifie l'équation. On retrouve $V_{A,B} = \{0\}$. La première méthode calcule les coordonnées de toutes les solutions ; la seconde explique pourquoi une solution ne peut avoir d'action non nulle sur un vecteur propre de B .

EXERCICE II

A. Première approche

1. La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, avec des limites finies à gauche et à droite en 1. Son intégrale totale s'obtient en calculant d'abord sur un segment : pour $a > 1$,

$$\int_1^a g(t) dt = \int_1^a \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}.$$

Le passage à la limite lorsque $a \rightarrow +\infty$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 1$. Les conditions de caractérisation d'une densité sont satisfaites ; g est donc une densité de probabilité.

2. Puisque g s'annule sur $] -\infty, 1[$, la fonction de répartition de X est

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - \frac{1}{t} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

La formule pour $t \geq 1$ vient de $\int_1^t u^{-2} du = 1 - 1/t$. Elle vaut aussi en $t = 1$ et rend F_X continue en ce point.

Pour l'espérance, on doit examiner la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt$. Ici $t \geq 1$ sur le support, donc l'intégrande est positif et

$$\int_1^a tg(t) dt = \int_1^a \frac{dt}{t} = \ln a \rightarrow +\infty.$$

L'intégrale n'est pas convergente : X n'admet donc pas d'espérance finie.

3. a) Un maximum est inférieur ou égal à t exactement lorsque les deux variables le sont :

$$[V \leq t] = [X \leq t] \cap [Y \leq t].$$

L'indépendance des deux événements à ce même seuil, expressément supposée, suffit donc à donner $F_V(t) = F_X(t)F_Y(t) = F_X(t)^2$. Ainsi

$$P(V \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

On n'a pas besoin de supposer plus généralement l'indépendance des variables X et Y .

3. b) La fonction F_V obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 1, et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $t > 1$,

$$F'_V(t) = 2 \left(1 - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} = \frac{2(t-1)}{t^3}.$$

Pour $t < 1$, sa dérivée est nulle. La fonction h de l'énoncé est positive et coïncide avec cette dérivée sauf éventuellement en 1 ; elle a des limites finies aux deux côtés de ce point. C'est donc une densité de V , soit

$$h(t) = \begin{cases} \frac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \geq 1, \\ 0 & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

3. c) Pour un minimum, l'événement complémentaire à considérer est

$$[U > t] = [X > t] \cap [Y > t].$$

Si deux événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont également. En effet, pour les événements $E = [X \leq t]$ et $F = [Y \leq t]$,

$$P(E^c \cap F^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(E \cap F) = (1 - P(E))(1 - P(F)).$$

On en déduit

$$P(U > t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1, \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Par complémentarité,

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 en dehors de 1. Sa dérivée vaut $2/t^3$ pour $t > 1$ et 0 pour $t < 1$. La fonction m de l'énoncé est positive, possède des limites latérales finies et coïncide avec cette dérivée hors de 1. Elle est donc une densité de U .

3. d) On examine séparément les deux intégrales de moments, qui sont positives sur le support.

Pour V , si $a > 1$,

$$\int_1^a th(t) dt = \int_1^a \left(\frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = 2 \ln a + \frac{2}{a} - 2.$$

Cette quantité tend vers $+\infty$: V n'admet pas d'espérance finie.

Pour U ,

$$\int_1^a tm(t) dt = \int_1^a \frac{2}{t^2} dt = 2 - \frac{2}{a} \rightarrow 2.$$

L'intégrale de $|t|m(t)$ est donc convergente. Ainsi U admet une espérance et $E(U) = 2$.

Le minimum possède donc une espérance finie alors que chacune des deux variables initiales et leur maximum n'en possèdent pas.

B. Situation plus générale

1. a) Le réel $t \geq 1$ est fixé. Chaque variable B_k est l'indicatrice de l'événement $[X_k \leq t]$; elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre

$$p = P(X_k \leq t) = 1 - \frac{1}{t}.$$

La famille de ces événements est mutuellement indépendante par hypothèse. Leurs indicatrices sont donc des variables de Bernoulli mutuellement indépendantes : pour chaque choix de valeurs 0 ou 1, l'événement correspondant est une intersection des événements initiaux ou de leurs complémentaires, dont la probabilité se factorise.

La somme Z compte le nombre de visiteurs arrivés au plus tard à l'heure t . C'est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p , donc

$$Z \sim \mathcal{B}\left(n, 1 - \frac{1}{t}\right).$$

Ainsi, pour $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}.$$

Si $t = 1$, le paramètre est nul et $Z = 0$ presque sûrement; on interprète alors la formule binomiale dans son cas dégénéré, sans ambiguïté sur la loi.

1. b) Le r -ième arrivant est arrivé au plus tard à t si et seulement si au moins r visiteurs sont arrivés au plus tard à t . Cette équivalence reste vraie même en présence d'arrivées simultanées, en comptant les heures avec leur multiplicité. On a donc

$$[T_r \leq t] = [Z \geq r].$$

Les événements $[Z = k]$ étant incompatibles, la loi binomiale obtenue donne

$$F_r(t) = P(T_r \leq t) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} \quad (t \geq 1).$$

Pour $t < 1$, tous les X_k sont à valeurs dans I , donc $F_r(t) = 0$. Ces deux expressions décrivent la fonction de répartition sur tout $\mathbb{R}$.

2. a) On utilise l'expression factorielle des coefficients binomiaux. Pour $1 \leq k \leq n$,

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!},$$

$$(n+1-k) \binom{n}{k-1} = (n+1-k) \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Les deux quantités étant égales, on obtient bien $k \binom{n}{k} - (n+1-k) \binom{n}{k-1} = 0$.

2. b) La somme qui définit F_r est finie ; on peut donc la dériver terme à terme sur $]1, +\infty[$. Pour alléger le calcul, posons sur cet intervalle $p(t) = 1 - 1/t$ et $q(t) = 1/t$. On a $p' = q^2$ et $q' = -q^2$. Il vient

$$F'_r(t) = q^2 \left[\sum_{k=r}^n k \binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1} (n-k) \binom{n}{k} p^k q^{n-k-1} \right].$$

Le second terme ne comporte pas de terme $k = n$, car la dérivée du facteur constant q^0 est nulle. En posant $j = k + 1$ dans cette seconde somme, on l'écrit

$$\sum_{j=r+1}^n (n+1-j) \binom{n}{j-1} p^{j-1} q^{n-j}.$$

L'identité de 2.a montre que, pour chaque indice de $r+1$ à n , le terme de cette somme annule le terme de même indice dans la première. Il ne reste que celui d'indice r :

$$F'_r(t) = q^2 r \binom{n}{r} p^{r-1} q^{n-r} = r \binom{n}{r} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+2-r} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{r-1}.$$

Il reste à vérifier le raccordement en 1. Pour $t \downarrow 1$, chacun des termes de la somme définissant $F_r(t)$ contient une puissance strictement positive de $1 - 1/t$, puisque $k \geq r \geq 1$; il tend donc vers 0. Ainsi F_r est continue en 1, et donc sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1 hors de ce point.

La fonction f_r donnée est positive, coïncide avec F'_r sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et admet des limites latérales finies en 1. Pour $r = 1$, son facteur de puissance $r - 1 = 0$ est la fonction constante 1; pour $r \geq 2$, ce facteur tend vers 0 à droite de 1. Les critères du programme sont donc satisfaits : T_r est à densité et f_r est une de ses densités. Sa valeur en 1 ne change pas la loi.

2. c) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, le facteur $(1 - 1/t)^{r-1}$ tend vers 1. Puisque $r \binom{n}{r} > 0$,

$$t f_r(t) \sim \frac{r \binom{n}{r}}{t^{n+1-r}}.$$

Sur le segment $[1, a]$, l'intégrande $t f_r(t)$ est continu et positif. Seule la convergence en $+\infty$ est donc à étudier. Le critère d'équivalence pour les intégrales positives et le critère de Riemann donnent

$$\int_1^{+\infty} t f_r(t) dt < +\infty \iff n+1-r > 1 \iff r < n.$$

Pour $r \in \{1, \dots, n-1\}$, l'intégrale est absolument convergente puisque l'intégrande est positif; T_r admet une espérance. Pour $r = n$, l'équivalent est n/t et l'intégrale diverge : T_n n'admet pas d'espérance finie.

3. a) Les fonctions polynomiales en jeu sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc l'intégration par parties sur ce segment est applicable. On prend une primitive de x^p égale à $x^{p+1}/(p+1)$ et on dérive $(1-x)^{q+1}$. On obtient

$$J(p, q+1) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^{q+1} \right]_0^1 + \frac{q+1}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^q dx.$$

Le terme de bord est nul : en 0, $x^{p+1} = 0$; en 1, $(1-x)^{q+1} = 0$. Par conséquent,

$$J(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} J(p+1, q),$$

ce qui est exactement $(p+1)J(p, q+1) = (q+1)J(p+1, q)$.

3. b) Pour $q \in \mathbb{N}$, une primitive de $(1-x)^q$ est $-(1-x)^{q+1}/(q+1)$. Ainsi

$$J(0, q) = \int_0^1 (1-x)^q dx = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{q+1}.$$

3. c) On effectue une récurrence sur p portant sur la propriété : « pour tout $q \in \mathbb{N}$, $J(p, q) = p!q!/(1+p+q)!$ ».

Pour $p = 0$, la formule de 3.b donne, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$J(0, q) = \frac{1}{q+1} = \frac{0!q!}{(q+1)!}.$$

Supposons la propriété vraie à un rang $p \in \mathbb{N}$ et fixons $q \in \mathbb{N}$. La relation de 3.a, réarrangée, puis l'hypothèse de récurrence appliquée à $q+1$ donnent

$$J(p+1, q) = \frac{p+1}{q+1} J(p, q+1) = \frac{p+1}{q+1} \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!} = \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!}.$$

La propriété est donc vraie au rang $p+1$ pour tout q . Par récurrence,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad J(p, q) = \frac{p!q!}{(1+p+q)!}.$$

4. a) Fixons $r \in \{1, \dots, n-1\}$ et $a > 1$. Le changement de variable indiqué, $x = 1/t$, est de classe C^1 et strictement décroissant sur le segment $[1, a]$. Ses nouvelles bornes sont 1 et $1/a$, et $dt = -dx/x^2$.

Comme

$$tf_r(t) = r \binom{n}{r} t^{-(n+1-r)} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{r-1},$$

on obtient, en inversant les bornes pour absorber le signe négatif,

$$\int_1^a tf_r(t) dt = r \binom{n}{r} \int_{1/a}^1 x^{n-r-1} (1-x)^{r-1} dx.$$

Les exposants $n-r-1$ et $r-1$ sont des entiers positifs ou nuls : l'intégrande transformé est donc continu sur $[0, 1]$.

4. b) Méthode 1 — Utilisation de l'intégrale J

L'existence de l'espérance a été établie en 2.c. Dans l'égalité de 4.a, on fait tendre a vers $+\infty$. Le membre de gauche tend vers $E(T_r)$. Pour le membre de droite, la continuité sur $[0, 1]$ assure que l'intégrale entre 0 et $1/a$ tend vers 0 ; il n'y a donc pas d'échange d'intégrale et de limite à justifier. Il vient

$$E(T_r) = r \binom{n}{r} J(n-r-1, r-1).$$

La formule de 3.c s'applique puisque les deux arguments sont des entiers naturels. Elle donne

$$E(T_r) = r \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{(n-r-1)!(r-1)!}{(n-1)!} = \frac{n}{n-r}.$$

Ainsi, pour tout $r \in \{1, \dots, n-1\}$, $E(T_r) = n/(n-r)$. Pour $n=2$ et $r=1$, on retrouve bien $E(U) = 2$.

Méthode 2 — Probabilité de dépassement et somme télescopique

Cette approche part du nombre de visiteurs déjà arrivés et permet d'expliquer le rôle de la queue de distribution dans le calcul d'une espérance. On établit d'abord la formule d'intégration nécessaire, plutôt que de la supposer connue.

Pour $t \geq 1$, l'événement $[T_r > t]$ signifie que moins de r visiteurs sont arrivés ; d'après 1.a,

$$S_r(t) = P(T_r > t) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \frac{1}{t^{n-k}}.$$

Pour $a > 1$, l'intégration par parties sur $[1, a]$, avec $F'_r = f_r$ sur $]1, a]$, donne

$$\int_1^a t f_r(t) dt = a F_r(a) - F_r(1) - \int_1^a F_r(t) dt = 1 + \int_1^a S_r(t) dt - a S_r(a).$$

Cette intégration par parties peut, si nécessaire, être effectuée sur $[1 + \varepsilon, a]$, puis prolongée par passage à la limite $\varepsilon \downarrow 0$: toutes les fonctions ont des limites finies en 1 et $F_r(1) = 0$.

Pour $a \geq 1$, la somme finie ci-dessus donne l'encadrement

$$0 \leq a S_r(a) \leq \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \frac{1}{a^{n-k-1}}.$$

Comme $k \leq r-1 \leq n-2$, tous les exposants $n-k-1$ sont au moins égaux à 1. Le membre de droite tend vers 0. En passant à la limite dans l'identité sur segment, on obtient donc la formule particulière

$$E(T_r) = 1 + \int_1^{+\infty} S_r(t) dt.$$

On peut intégrer séparément les r termes, la somme étant finie. Le changement de variable $x = 1/t$, d'abord sur $[1, a]$ puis avec $a \rightarrow +\infty$, donne pour $0 \leq k \leq r-1$

$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \frac{dt}{t^{n-k}} = J(n-k-2, k).$$

Les deux indices sont naturels puisque $k \leq n-2$. Par la formule de 3.c,

$$\binom{n}{k} J(n-k-2, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} = \frac{n}{(n-k)(n-k-1)}.$$

En utilisant $1/[j(j-1)] = 1/(j-1) - 1/j$, il vient

$$E(T_r) = 1 + n \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{1}{n-k-1} - \frac{1}{n-k} \right) = 1 + n \left(\frac{1}{n-r} - \frac{1}{n} \right) = \frac{n}{n-r}.$$

La première méthode est plus courte après le calcul de la densité ; la seconde retrouve la même valeur à partir des probabilités de dépassement, par une somme télescopique.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité de modification mathématique ou d'admission nouvelle. Toutes les hypothèses de l'énoncé sont conservées, en particulier l'indépendance des événements à un même seuil, utilisée sans la remplacer par une hypothèse plus forte d'indépendance générale des variables.