



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2001

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE I

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par

$$H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}.$$

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. a) On suppose dans cette question que $m = 2$. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 et les sous-espaces propres associés.
1. b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.
2. Étudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice H_0 . Cette matrice est-elle diagonalisable ?
3. a) Montrer qu'il existe un réel a , qu'on déterminera, qui est une valeur propre de la matrice H_m pour toutes les valeurs du paramètre m .
3. b) Déterminer, pour chaque valeur de m , le sous-espace propre de H_m associé à la valeur propre a . Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.
4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.
Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.
5. En se plaçant dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs v_1, v_2 et v_3 , déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice H_m est diagonalisable.

EXERCICE II

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Si Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note $E(Z)$ son espérance.

La partie II peut être traitée indépendamment de la partie I.

I. Préliminaire

1. a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n .

1. b) Quelles sont l'espérance et la variance de S_n ?

2. a) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait l'inégalité

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}.$$

2. b) Dédire de la majoration obtenue que, pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0.$$

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème limite central, que la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$n \mapsto P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

admet une limite non nulle.

L'objet de la suite de l'exercice est l'étude d'une majoration de la probabilité

$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ meilleure que la majoration obtenue à la question I.2.a.

II. Étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right).$$

1. a) Étudier les variations de la fonction f .

1. b) Montrer qu'il existe des réels α et β , que l'on déterminera, tels que l'on ait

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0.$$

1. c) Montrer de même qu'il existe des réels α' et β' , tels que l'on ait

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\alpha' x + \beta')) = 0.$$

2. Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et soit φ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_a(x) = f(x) - ax.$$

2. a) Étudier les variations de la fonction φ_a et préciser les valeurs de $\varphi_a(0)$ et de $\varphi'_a(0)$.

Montrer que la fonction φ_a atteint un minimum en un unique point x_a de $\mathbb{R}$ dont on donnera l'expression en fonction de a .

2. b) Étudier le signe de x_a suivant les valeurs de a . Montrer, pour tout réel a vérifiant $a \neq \frac{1}{2}$, l'inégalité $e^{\varphi_a(x_a)} < 1$.

Dans toute la suite, pour tout réel a vérifiant $0 < a < 1$, on pose $h_a = e^{\varphi_a(x_a)}$.

III. Étude de l'écart de $\frac{S_n}{n}$ à sa moyenne

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs réelles positives $z_1, z_2, \dots, z_r$, on a la majoration $P(Z \geq 1) \leq E(Z)$.

2. Calculer, pour tout réel u et tout entier $n \geq 1$, l'espérance $E(e^{uS_n})$. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, si a est un réel vérifiant $0 < a < 1$ et t un réel quelconque, on a

$$E(e^{t(S_n/n-a)}) = e^{n\varphi_a(t/n)}.$$

3. On suppose, dans cette question, que a est un réel vérifiant $\frac{1}{2} < a < 1$.

3. a) Montrer que, pour tout réel $t > 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$P\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) \leq e^{n\varphi_a(t/n)}.$$

3. b) En donnant à t , dans l'inégalité précédente, une valeur convenablement choisie, établir, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (h_a)^n.$$

4. Soit un réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; on pose $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

4. a) Comparer, pour tout entier $n \geq 1$, les lois de probabilité des variables aléatoires S_n et $n - S_n$. En déduire l'égalité

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right),$$

puis la majoration

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2(h_a)^n.$$

En quoi cette majoration peut-elle être considérée, pour $\varepsilon > 0$ fixé, comme meilleure que celle de la question I.2.a ?

4. b) À l'aide de l'expression de x_a trouvée à la question II.2.a, établir l'égalité

$$\varphi_a(x_a) = - \left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \ln(1 + 2\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \ln(1 - 2\varepsilon) \right).$$

5. a) En déduire qu'on a

$$\varphi_{1/2+\varepsilon}(x_{1/2+\varepsilon}) = -2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

quand ε tend vers 0.

5. b) Montrer qu'on peut retrouver ainsi la limite obtenue à la question I.2.b.

IV. Étude d'un algorithme

On se propose d'illustrer cet exercice par une simulation. On considère le programme suivant. La commande `rd.randint(0, 100)` renvoie un entier tiré uniformément dans $\{0, 1, \dots, 99\}$; les appels successifs simulent des tirages indépendants. Les fonctions `np.exp(x)` et `np.log(x)` calculent respectivement l'exponentielle de x et, pour $x > 0$, son logarithme népérien. La fonction `abs` calcule la valeur absolue.

1. Que fait la fonction EP de ce programme?
2. Quels nombres entiers sont comptabilisés dans les variables U, V et W à la fin du programme?
3. De quels nombres les valeurs P1, P2 et P3 fournies par le programme sont-elles des estimations?
4. À quoi peut-on s'attendre pour la valeur de P1?

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

nombre_de_lancers = 20000
nombre_d_essais = 2000

def EP(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        X = rd.randint(0, 100)
        if X > 49:
            S = S + 1
    return S

n = nombre_de_lancers
K = nombre_d_essais
U = 0
V = 0
W = 0
for j in range(K):
    S = EP(n)
    if abs(S / n - 0.5) > np.exp(-0.4 * np.log(n)):
        U = U + 1
    if abs(S / n - 0.5) > np.exp(-0.5 * np.log(n)):
        V = V + 1
    if abs(S / n - 0.5) > np.exp(-0.9 * np.log(n)):
        W = W + 1
P1 = U / K
P2 = V / K
P3 = W / K
print("P1 =", P1)
print("P2 =", P2)
print("P3 =", P3)
```