



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2001

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE I

1. a) Pour $m = 2$, on a

$$H_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un produit matriciel direct donne $H_2^2 = I_3$. Si λ est une valeur propre et $v \neq 0$ un vecteur propre associé, alors $v = H_2^2 v = \lambda^2 v$, donc $\lambda^2 = 1$. Les seules valeurs propres possibles sont ainsi 1 et -1 .

Pour déterminer leurs sous-espaces propres, écrivons $v = (x, y, z)$.

L'équation $(H_2 - I_3)v = 0$ donne

$$-4x + 2y + 2z = 0, \quad -2x + 2z = 0, \quad -2x + 2y = 0.$$

Les deux dernières équations imposent $z = x$ et $y = x$; la première est alors satisfaite. Ainsi

$$E_1(H_2) = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

D'autre part, les trois lignes de $H_2 + I_3$ sont identiques et égales à $(-2, 2, 2)$. L'équation $(H_2 + I_3)v = 0$ équivaut donc à $x = y + z$, d'où

$$E_{-1}(H_2) = \{(y + z, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 0)).$$

Ces deux espaces contiennent des vecteurs non nuls : les valeurs propres sont exactement 1 et -1 .

1. b) Les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont indépendants : dans une combinaison linéaire nulle, la deuxième et la troisième coordonnées imposent l'annulation des deux coefficients.

Le vecteur $(1, 1, 1)$ n'appartient pas au plan $x = y + z$. La famille

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$$

est donc une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres. Par conséquent, H_2 est diagonalisable et sa matrice dans cette base est $\text{diag}(1, -1, -1)$.

2. On a

$$H_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = H_0 - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne $N^2 = 0$. Si $H_0 v = \lambda v$ avec $v \neq 0$, alors $N^2 v = (\lambda - 1)^2 v = 0$, donc $\lambda = 1$.

L'équation $Nv = 0$ équivaut à $x = z$, sans condition sur y . Ainsi

$$E_1(H_0) = \{(x, y, x) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0)).$$

Méthode 1 — Dimension du sous-espace propre

Le sous-espace propre calculé est de dimension 2; il ne peut donc fournir une base de trois vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$. La matrice H_0 n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Conséquence d'une unique valeur propre

Si H_0 était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que $H_0 = PDP^{-1}$, où D serait diagonale et ses coefficients diagonaux seraient des valeurs propres de H_0 . Puisque la seule valeur propre est 1, on aurait $D = I_3$, puis $H_0 = PI_3P^{-1} = I_3$, en contradiction avec son expression. Donc H_0 n'est pas diagonalisable.

La première méthode utilise la dimension calculée ; la seconde permet de conclure dès qu'on connaît l'unique valeur propre et qu'on constate que la matrice n'est pas l'identité.

3. a) La somme des coefficients de chacune des lignes de H_m vaut 1 :

$$(-1 - m) + m + 2 = 1, \quad -m + 1 + m = 1, \quad -2 + m + 3 - m = 1.$$

Par conséquent, $H_m(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$. Le vecteur $(1, 1, 1)$ étant non nul, $a = 1$ convient.

3. b) Pour $v = (x, y, z)$, l'équation $(H_m - I_3)v = 0$ s'écrit

$$(-2 - m)x + my + 2z = 0, \quad m(z - x) = 0, \quad -2x + my + (2 - m)z = 0.$$

Si $m \neq 0$, la deuxième équation donne $z = x$. La première devient $m(y - x) = 0$, donc $y = x$; la troisième est alors satisfaite. Ainsi

$$E_1(H_m) = \text{Vect}((1, 1, 1)) \quad \text{si } m \neq 0.$$

Si $m = 0$, la question 2 donne

$$E_1(H_0) = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0)).$$

Le vecteur $v_1 = (1, 1, 1)$ appartient bien à tous ces sous-espaces ; il est non nul et sera conservé dans la suite.

4. Le calcul des images donne

$$h_m(v_2) = H_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 0 \\ 1-m \end{pmatrix} = (1-m)v_2,$$

$$h_m(v_3) = H_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-m \\ m-2 \end{pmatrix} = (m-2)v_2 + (1-m)v_3.$$

Ces deux images sont des combinaisons linéaires de v_2 et v_3 , donc appartiennent à F .
Par linéarité, l'image de tout vecteur de F appartient également à F .

5. Vérifions d'abord que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base. Si $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$, ses coordonnées donnent

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta = 0.$$

Les deux dernières égalités donnent $\beta = \gamma = -\alpha$; la première impose alors $\alpha = 0$, puis $\beta = \gamma = 0$. La famille est libre et comporte trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: c'est une base.

En utilisant les images calculées précédemment, on obtient

$$B_m = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & m-2 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}.$$

Pour $m = 2$, cette matrice est diagonale; on retrouve la diagonalisation de la question 1.

Pour $m = 0$, la matrice H_0 n'est pas diagonalisable d'après la question 2.

Supposons désormais $m \neq 0$ et $m \neq 2$. Les seules valeurs propres possibles de B_m sont 1 et $1 - m$. En effet, si λ diffère de ces deux nombres, la dernière équation de $(B_m - \lambda I_3)^t(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ impose $\gamma = 0$, puis la deuxième impose $\beta = 0$ et la première $\alpha = 0$: aucun vecteur propre non nul n'existe. Les deux valeurs 1 et $1 - m$ sont distinctes et effectivement présentes, puisque v_1 et v_2 sont des vecteurs propres associés.

Pour la valeur propre 1, la question 3.b montre que le sous-espace propre est de dimension 1. Pour la valeur propre $1 - m$, un vecteur de coordonnées (α, β, γ) dans $\mathcal{B}$ doit vérifier

$$m\alpha = 0, \quad (m - 2)\gamma = 0.$$

Sous les hypothèses considérées, cela impose $\alpha = \gamma = 0$, tandis que β est libre. Le second sous-espace propre est donc de dimension 1 et engendré par v_2 .

Tous les vecteurs propres appartiennent à $\text{Vect}(v_1, v_2)$; il est impossible de constituer une base de trois vecteurs propres. Finalement,

H_m est diagonalisable si et seulement si $m = 2$.

EXERCICE II

I. Préliminaire

1. a) Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et les variables X_i sont mutuellement indépendantes. La variable S_n est donc le nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre :

$$S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

En particulier, son support est $\{0, \dots, n\}$ et

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} 2^{-n}.$$

1. b) La variable S_n est bornée ; tous ses moments existent. Les formules de la loi binomiale donnent

$$E(S_n) = \frac{n}{2}, \quad V(S_n) = \frac{n}{4}.$$

2. a) Posons $Y_n = S_n/n$. Cette variable possède une variance et vérifie

$$E(Y_n) = \frac{1}{2}, \quad V(Y_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{4n}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, applicable à Y_n , donne pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

La constante $K_\varepsilon = 1/(4\varepsilon^2)$ convient donc pour tous les entiers $n \geq 1$.

2. b) L'inégalité explicite précédente est valable pour chaque seuil strictement positif.

On peut donc y choisir $\varepsilon = n^{-r}$, même si ce seuil dépend de n :

$$0 \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq n^{-r}\right) \leq \frac{1}{4n(n^{-r})^2} = \frac{1}{4}n^{2r-1}.$$

Comme $r < \frac{1}{2}$, l'exposant $2r - 1$ est strictement négatif ; le majorant tend vers 0. Le théorème d'encadrement donne la limite demandée.

3. Les variables X_i sont indépendantes, de même loi, d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance

$\frac{1}{4} > 0$. Le théorème limite central s'applique donc à

$$Z_n = \frac{S_n - n/2}{\sqrt{n}/2} = 2\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right).$$

La suite (Z_n) converge en loi vers une variable Z de loi normale centrée réduite.

L'événement de l'énoncé est exactement $\{|Z_n| > 2\}$. Par le théorème limite central sur l'intervalle fixe $[-2, 2]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-2 \leq Z_n \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2),$$

où Φ est la fonction de répartition normale centrée réduite. En passant à l'événement complémentaire et en utilisant $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2(1 - \Phi(2)).$$

Cette limite est strictement positive, car la densité normale est strictement positive sur $]2, +\infty[$. Elle vaut approximativement 0,0455.

II. Étude de fonctions

1. a) Pour tout réel x , on a $(e^x + 1)/2 > 0$; la fonction f est donc définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Aux bornes,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

En particulier, $f(0) = 0$; le tableau de variations se résume à une croissance stricte de $-\ln 2$ vers $+\infty$.

1. b) Pour étudier la différence avec une fonction affine, factorisons e^x dans l'argument du logarithme :

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x(1 + e^{-x})}{2} \right) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-x}).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $e^{-x} \rightarrow 0$ et, par continuité du logarithme en 1, $\ln(1 + e^{-x}) \rightarrow 0$. Les valeurs

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\ln 2$$

conviennent. La droite d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

1. c) On écrit cette fois

$$f(x) = -\ln 2 + \ln(1 + e^x).$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ et $\ln(1 + e^x) \rightarrow 0$. On peut donc prendre

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = -\ln 2.$$

La courbe admet l'asymptote horizontale $y = -\ln 2$ en $-\infty$.

2. a) Fixons $a \in]0, 1[$. La fonction φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'_a(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - a = \frac{(1 - a)e^x - a}{1 + e^x}.$$

Son dénominateur est positif, tandis que son numérateur s'annule exactement lorsque $e^x = a/(1 - a)$. Puisque $a/(1 - a) > 0$, cet unique point est

$$x_a = \ln\left(\frac{a}{1 - a}\right).$$

L'exponentielle étant strictement croissante, $\varphi'_a(x) < 0$ si $x < x_a$ et $\varphi'_a(x) > 0$ si $x > x_a$. La fonction décroît strictement jusqu'à x_a , puis croît strictement. Elle atteint donc en x_a son unique minimum global.

Les asymptotes de f donnent aussi $\varphi_a(x) \rightarrow +\infty$ aux deux extrémités : en $+\infty$, son terme affine dominant est $(1 - a)x$; en $-\infty$, c'est $-ax$.

Enfin,

$$\varphi_a(0) = 0, \quad \varphi'_a(0) = \frac{1}{2} - a.$$

2. b) Comme $\ln$ est strictement croissante et $\ln 1 = 0$, le signe de x_a est celui de $a/(1 - a) - 1 = (2a - 1)/(1 - a)$. Ainsi

$$x_a < 0 \text{ si } a < \frac{1}{2}, \quad x_a = 0 \text{ si } a = \frac{1}{2}, \quad x_a > 0 \text{ si } a > \frac{1}{2}.$$

Si $a \neq \frac{1}{2}$, le minimum unique est atteint en $x_a \neq 0$. La stricte monotonie de part et d'autre du minimum entraîne

$$\varphi_a(x_a) < \varphi_a(0) = 0.$$

En appliquant la fonction exponentielle, strictement croissante, on obtient

$$0 < h_a = e^{\varphi_a(x_a)} < 1.$$

Pour le cas limite $a = \frac{1}{2}$, on a au contraire $x_a = 0$ et $h_a = 1$.

III. Étude de l'écart de $\frac{S_n}{n}$ à sa moyenne

1. La variable Z a un support fini constitué de valeurs positives ou nulles, donc son espérance existe. En ne conservant dans sa somme d'espérance que les valeurs supérieures ou égales à 1, on obtient

$$E(Z) = \sum_{j=1}^r z_j P(Z = z_j) \geq \sum_{j: z_j \geq 1} z_j P(Z = z_j) \geq \sum_{j: z_j \geq 1} P(Z = z_j) = P(Z \geq 1).$$

La première inégalité utilise la positivité de tous les termes et la seconde $z_j \geq 1$ sur l'ensemble considéré. Cette preuve particulière suffit pour la suite.

2. Méthode 1 — Transfert et binôme

La variable S_n est de support fini ; l'espérance demandée existe pour tout $u \in \mathbb{R}$. Le théorème de transfert et le binôme donnent

$$E(e^{uS_n}) = \sum_{k=0}^n e^{uk} \binom{n}{k} 2^{-n} = 2^{-n} (1 + e^u)^n = \left(\frac{1 + e^u}{2} \right)^n.$$

Méthode 2 — Indépendance des lancers

Comme $S_n = X_1 + \dots + X_n$, on a

$$e^{uS_n} = \prod_{i=1}^n e^{uX_i}.$$

Les variables e^{uX_i} sont indépendantes, car elles sont des fonctions de variables indépendantes ; elles sont bornées, donc intégrables. L'espérance du produit est ainsi le produit des espérances. Or

$$E(e^{uX_i}) = \frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^u = \frac{1+e^u}{2}.$$

On retrouve

$$E(e^{uS_n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{uX_i}) = \left(\frac{1+e^u}{2}\right)^n.$$

La première méthode exploite directement la loi de S_n ; la seconde montre le rôle structural de l'indépendance et reste utile lorsque la loi de la somme n'est pas encore connue.

Pour $a \in]0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, on applique ce résultat avec $u = t/n$:

$$E(e^{t(S_n/n-a)}) = e^{-ta} \left(\frac{1+e^{t/n}}{2}\right)^n.$$

Tous les facteurs étant positifs, on peut écrire le membre de droite sous la forme

$$\exp\left(-ta + n \ln\left(\frac{1+e^{t/n}}{2}\right)\right) = \exp(n(f(t/n) - a(t/n))) = e^{n\varphi_a(t/n)}.$$

3. a) Fixons $t > 0$ et posons $Z = e^{t(S_n/n-a)}$. Cette variable est positive et prend un nombre fini de valeurs. De plus, puisque $t > 0$ et que l'exponentielle est strictement croissante,

$$\left\{\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right\} = \{Z \geq 1\}.$$

En appliquant la question III.1, puis l'identité de III.2, on obtient

$$P\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) = P(Z \geq 1) \leq E(Z) = e^{n\varphi_a(t/n)}.$$

3. b) L'hypothèse $a > \frac{1}{2}$ implique $x_a > 0$ d'après II.2.b. Le choix $t = nx_a$ est donc autorisé dans la question précédente. Il donne

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{n\varphi_a(x_a)} = (e^{\varphi_a(x_a)})^n = (h_a)^n.$$

Ce choix minimise le majorant parmi tous les $t > 0$, puisque x_a est le point où φ_a atteint son minimum.

4. a) Méthode 1 — Symétrie des probabilités binomiales

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(n - S_n = k) = P(S_n = n - k) = \binom{n}{n-k} 2^{-n} = \binom{n}{k} 2^{-n} = P(S_n = k).$$

Les deux variables ont donc la même loi. Il s'ensuit

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = P\left(\frac{n - S_n}{n} \geq a\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right).$$

Méthode 2 — Échange des deux résultats de la pièce

Chaque variable $1 - X_i$ suit également la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Les variables $(1 - X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes, puisque les X_i le sont. Leur somme $n - S_n$ suit donc la même loi binomiale que S_n , ce qui redonne l'égalité précédente. Cette méthode met en évidence la symétrie de l'expérience; la première la vérifie directement sur les probabilités.

Comme $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, les deux événements

$$\left\{\frac{S_n}{n} \geq a\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right\}$$

sont disjoints. Leur réunion est $\{|S_n/n - 1/2| \geq \varepsilon\}$. Ils ont la même probabilité, donc III.3.b donne

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 2P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq 2(h_a)^n.$$

Pour comparer les majorations à ε fixé, rappelons que $0 < h_a < 1$. Posons $c = -\ln h_a > 0$. Le rapport du nouveau majorant à celui de I.2.a est

$$\frac{2(h_a)^n}{1/(4n\varepsilon^2)} = 8\varepsilon^2 n e^{-cn} \rightarrow 0$$

par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances. La majoration exponentielle est donc plus petite à partir d'un certain rang, avec un gain asymptotique qui tend vers l'infini. Cela ne prétend pas qu'elle est meilleure pour chaque petit entier n .

4. b) Puisque $x_a = \ln(a/(1-a))$, on a $e^{x_a} = a/(1-a)$, puis

$$f(x_a) = \ln\left(\frac{a/(1-a) + 1}{2}\right) = -\ln 2 - \ln(1-a).$$

Ainsi,

$$\varphi_a(x_a) = -\ln 2 - \ln(1-a) - a(\ln a - \ln(1-a)) = -\ln 2 - a \ln a - (1-a) \ln(1-a).$$

On peut regrouper les logarithmes sous la forme

$$\varphi_a(x_a) = -a \ln(2a) - (1-a) \ln(2(1-a)),$$

car $a + (1-a) = 1$. Avec $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$, cela donne exactement

$$\varphi_a(x_a) = -\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \ln(1+2\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \ln(1-2\varepsilon)\right).$$

Les arguments des logarithmes sont strictement positifs puisque $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

5. a) Pour éviter de supposer des règles de calcul sur les développements limités, appliquons directement Taylor-Young à une fonction de classe C^2 . Définissons sur

l'ouvert $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$$g(\varepsilon) = - \left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \ln(1 + 2\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \ln(1 - 2\varepsilon) \right).$$

Les arguments des logarithmes y sont positifs ; g est de classe C^∞ . En dérivant les deux produits, les termes constants se compensent et il vient

$$g'(\varepsilon) = \ln(1 - 2\varepsilon) - \ln(1 + 2\varepsilon),$$

$$g''(\varepsilon) = -\frac{2}{1 - 2\varepsilon} - \frac{2}{1 + 2\varepsilon} = -\frac{4}{1 - 4\varepsilon^2}.$$

On a donc $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ et $g''(0) = -4$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 donne

$$g(\varepsilon) = g(0) + g'(0)\varepsilon + \frac{1}{2}g''(0)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) = -2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

La question III.4.b identifie $g(\varepsilon)$ à $\varphi_{1/2+\varepsilon}(x_{1/2+\varepsilon})$, ce qui établit le résultat demandé sans calcul de développement limité par produit ou composition.

5. b) Fixons $r \in]0, \frac{1}{2}[$ et posons $\varepsilon_n = n^{-r}$. Comme $\varepsilon_n \rightarrow 0$, on a $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang. La majoration de III.4.a s'applique alors avec ce seuil variable :

$$P \left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq n^{-r} \right) \leq 2 \exp(n g(\varepsilon_n)).$$

Le développement précédent signifie $g(\varepsilon)/\varepsilon^2 \rightarrow -2$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $g(\varepsilon) \leq -\varepsilon^2$. Il en résulte, pour n assez grand,

$$0 \leq P \left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq n^{-r} \right) \leq 2 \exp(-n\varepsilon_n^2) = 2 \exp(-n^{1-2r}).$$

Puisque $1 - 2r > 0$, le dernier majorant tend vers 0. On retrouve donc la limite de I.2.b, cette fois avec une majoration exponentielle explicite. Aucune règle de composition des équivalents avec l'exponentielle n'est nécessaire.

IV. Étude d'un algorithme

1. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

La commande `rd.randint(0, 100)` choisit uniformément un entier de 0 à 99 inclus. Parmi ces cent entiers, exactement cinquante vérifient $X > 49$. Ainsi, le test réalise un succès de probabilité $\frac{1}{2}$. Les appels successifs simulent des tirages indépendants.

La fonction $EP(n)$ effectue n de ces épreuves et renvoie leur nombre de succès. Sa valeur de retour suit donc la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire la loi de S_n .

Le programme complet est :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

nombre_de_lancers = 20000
nombre_d_essais = 2000

def EP(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        X = rd.randint(0, 100)
        if X > 49:
            S = S + 1
    return S

n = nombre_de_lancers
K = nombre_d_essais
U = 0
V = 0
W = 0
for j in range(K):
    S = EP(n)
```

```

if abs(S / n - 0.5) > np.exp(-0.4 * np.log(n)):
    U = U + 1

if abs(S / n - 0.5) > np.exp(-0.5 * np.log(n)):
    V = V + 1

if abs(S / n - 0.5) > np.exp(-0.9 * np.log(n)):
    W = W + 1

P1 = U / K
P2 = V / K
P3 = W / K

print("P1 =", P1)
print("P2 =", P2)
print("P3 =", P3)

```

La boucle `range(n)` comporte exactement n passages et `range(K)` exactement K répétitions de l'expérience. La valeur S est remise à zéro à chaque appel de EP. Les fonctions `np.exp` et `np.log` donnent $\exp(-r \ln n) = n^{-r}$ pour les trois valeurs de r utilisées.

2. Notons $S_n^{(j)}$ le nombre de succès obtenu lors du j -ième appel de EP, pour $1 \leq j \leq K$.

Les variables comptabilisées sont

$$U = \# \left\{ j \in \{1, \dots, K\} : \left| \frac{S_n^{(j)}}{n} - \frac{1}{2} \right| > n^{-0,4} \right\},$$

$$V = \# \left\{ j \in \{1, \dots, K\} : \left| \frac{S_n^{(j)}}{n} - \frac{1}{2} \right| > n^{-0,5} \right\},$$

$$W = \# \left\{ j \in \{1, \dots, K\} : \left| \frac{S_n^{(j)}}{n} - \frac{1}{2} \right| > n^{-0,9} \right\}.$$

Ici $n = 20000$ et $K = 2000$. Chacun de ces compteurs est un entier compris entre 0 et 2000. Comme $n > 1$, les seuils vérifient $n^{-0,4} > n^{-0,5} > n^{-0,9}$: chaque événement compté par U est aussi compté par V , puis par W . On a donc $0 \leq U \leq V \leq W \leq K$.

3. Pour $r > 0$, posons

$$p_{n,r} = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > n^{-r}\right).$$

Les rapports P1, P2 et P3 sont les fréquences observées sur K expériences indépendantes des événements correspondants. Ce sont donc des estimations respectives de

$$p_{20000,0,4}, \quad p_{20000,0,5}, \quad p_{20000,0,9}.$$

Pour justifier cette interprétation, fixons l'un des seuils. Les indicatrices de son dépassement lors des différents essais sont indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p_{n,r}$. Leur moyenne empirique a pour espérance $p_{n,r}$ et pour variance $p_{n,r}(1 - p_{n,r})/K \leq 1/(4K)$. Par Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\eta > 0$, la probabilité qu'elle s'écarte de $p_{n,r}$ d'au moins η est majorée par $1/(4K\eta^2)$, quantité qui tend vers 0 lorsque $K \rightarrow +\infty$.

La distinction est la suivante : avant l'exécution, le rapport aléatoire est un estimateur de la probabilité ; le nombre effectivement affiché est une estimation observée. Ces fréquences illustrent les résultats, sans en constituer des preuves.

4. Puisque $0,4 < \frac{1}{2}$, la question I.2.b montre déjà que $p_{n,0,4} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour $n = 20000$, on s'attend donc à une valeur de P1 proche de zéro. La majoration exponentielle permet de préciser pourquoi une valeur exactement nulle est très probable avec $K = 2000$ essais.

En posant $\varepsilon = n^{-0,4}$ et $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$, la question III.4.a donne

$$p_{n,0,4} \leq 2 \exp(-ng(\varepsilon)),$$

car l'événement avec une inégalité stricte est inclus dans celui avec une inégalité large.

Pour $n = 20000$, on a $\varepsilon \simeq 0,0190$ et le membre de droite vaut environ $1,01 \times 10^{-6}$.

Le compteur U a alors pour espérance $Kp_{n,0,4} \leq 0,00202$. Comme U est positif et de support fini, III.1 donne

$$P(U \geq 1) \leq E(U) \leq 0,00202.$$

Ainsi, avec une probabilité supérieure à 0,9979, aucun dépassement n'est observé et P1 vaut exactement 0. Cette valeur demeure aléatoire et n'est pas imposée à chaque exécution.

Relevé des adaptations

Exercice II, IV.1 à IV.4 : code adapté en Python, avec fonction EP renvoyant explicitement le nombre de succès ; commandes aléatoires et fonctions numériques documentées. Les effectifs, seuils, tests stricts et sorties du programme sont conservés. Les questions portant sur la procédure sont formulées avec le vocabulaire des fonctions Python.