



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE I

Les dérivées en 0 des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ sont entendues à droite.

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x > 0$ et tout nombre entier naturel k , l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt$$

est convergente. Pour quelles valeurs de l'entier k cette intégrale est-elle aussi convergente pour $x = 0$?

2. On se propose d'étudier la fonction F définie, pour $x \geq 0$, par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^5} dt.$$

Montrer que la fonction F est une fonction strictement positive, décroissante et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

3. a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel x et tout réel $h \geq 0$, on a

$$|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}.$$

3. b) Montrer de même que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel x et tout réel $h \leq 0$, on a

$$|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)}.$$

3. c) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$ et tout réel h tel que $x + h \geq 0$, on a

$$\left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^5} dt.$$

3. d) Montrer enfin que la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner une expression de sa fonction dérivée F' .

4. Montrer de même que F' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$F''(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt.$$

5. On se propose de montrer que la fonction $\ln(F)$ est convexe.

5. a) Montrer que si a, b et c sont trois nombres réels tels que, pour tout nombre réel λ , on ait l'inégalité $a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$, alors, nécessairement, $ac - b^2 \geq 0$.

5. b) En déduire que la fonction $\ln(F)$ est une fonction convexe.

EXERCICE II

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1 , et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable l'une des lettres a, b ou c . Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0 . On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c .

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case ;
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case ;
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On suppose qu'il existe un espace probabilisé dont la probabilité est notée P , qui modélise cette expérience, et que l'on définit deux suites de variables aléatoires sur cet espace, $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$, décrivant les positions respectives des jetons A et B , en posant :

$X_0 = Y_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $X_n = 0$ si, à l'issue de la n -ième opération, le jeton A se trouve dans C_0 , et $X_n = 1$ s'il se trouve dans C_1 ; de même, $Y_n = 0$ si le jeton B est dans C_0 à l'issue de la n -ième opération, et $Y_n = 1$ s'il se trouve dans C_1 .

Dans les questions matricielles, les probabilités sont rangées en colonnes. La matrice agissant sur ces colonnes est la transposée de la matrice de transition définie avec des probabilités en lignes.

I. Simulation

Écrire un programme en Python permettant de simuler l'expérience, qui lira un entier naturel N entré au clavier, représentant le nombre de tirages à effectuer, et qui affichera à l'écran la liste des couples observés (X_n, Y_n) pour $1 \leq n \leq N$.

On pourra utiliser les commandes suivantes :

Python

```
import numpy as np  
np.random.randint(0, 3)
```

La dernière expression renvoie un entier de $\{0, 1, 2\}$ de manière équiprobable. Les appels successifs simulent des tirages indépendants. Pour la lecture au clavier, on dispose de la syntaxe suivante :

Python

```
N = int(input("N = "))
```

La fonction de lecture affiche le message, puis lit une chaîne de caractères; la conversion extérieure transforme cette chaîne en entier.

II. Étude du mouvement du jeton A

1. a) Soit n un entier strictement positif. Déterminer la probabilité que, à l'issue de la n -ième opération, le jeton A n'ait jamais quitté C_0 .
1. b) Quelle est la probabilité que le jeton A reste indéfiniment dans C_0 ?
2. Soit $k \geq 2$ un entier. On s'intéresse à l'événement D_k : après avoir quitté C_0 , le jeton A y revient pour la première fois à l'issue de la k -ième opération. Son départ peut avoir lieu lors de n'importe laquelle des opérations précédentes. Déterminer $P(D_k)$.

3. Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. a) Déterminer les valeurs propres de M et donner une base de vecteurs propres.
3. b) En déduire l'expression de M^n , pour tout entier n strictement positif.
4. a) Calculer les probabilités $P(X_1 = 0)$ et $P(X_1 = 1)$.
4. b) Déterminer une matrice Q telle que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

4. c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice Q^n et en déduire la loi de la variable X_n .

III. Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On suppose que l'on définit sur le même espace probabilisé une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geq 0}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B , en posant $W_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul :

- $W_n = 0$ si les deux jetons se trouvent dans C_0 à l'issue de la n -ième opération ;
- $W_n = 1$ si A se trouve dans C_0 et B dans C_1 ;
- $W_n = 2$ si A se trouve dans C_1 et B dans C_0 ;
- $W_n = 3$ si les deux jetons se trouvent dans C_1 .

1. Calculer les probabilités $P(W_1 = i)$ pour i égal à 0, 1, 2 et 3.
2. Déterminer la matrice R telle que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1} = 0) \\ P(W_{n+1} = 1) \\ P(W_{n+1} = 2) \\ P(W_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} P(W_n = 0) \\ P(W_n = 1) \\ P(W_n = 2) \\ P(W_n = 3) \end{pmatrix}.$$

3. On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Pour tout entier naturel n non nul, calculer les matrices U^n et V^n .

3. b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité

$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} U^{n-k} V^k,$$

où, par convention, on pose $U^0 = V^0 = I$.

3. c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité

$$(U - V)^n = \frac{1}{4} [3^n - (-1)^n] U + (-1)^n V^n.$$

4. Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice R^n et donner la loi de la variable W_n . On distinguera les cas n pair et n impair.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la covariance de X_n et Y_n , et calculer la limite de cette covariance quand n tend vers $+\infty$.

IV. Étude d'un temps de séjour

On suppose que chaque tirage, avec l'opération qui le suit, dure une minute. Ainsi, à l'issue de la n -ième opération, n minutes se sont écoulées depuis le début de l'expérience.

Soit n un entier naturel non nul. On note T_n le nombre de minutes de séjour du jeton A dans C_1 entre le début de l'expérience et l'issue de la n -ième opération. Pour ce décompte discret, la minute de la k -ième opération est comptée dans C_1 lorsque $X_k = 1$.

1. Exprimer T_n à l'aide des variables X_k , pour k compris entre 1 et n .
2. En déduire l'espérance $E(T_n)$. Calculer la limite de $\frac{1}{n}E(T_n)$ quand n tend vers l'infini.