



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques III — Option économique

2000

Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

EXERCICE I

On notera, lorsque l'intégrale converge,

$$J_k(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt.$$

1. Pour $x > 0$, l'intégrande est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Les croissances comparées donnent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^k e^{-xt/2} = 0.$$

Il existe donc $T \geq 1$ tel que, pour $t \geq T$,

$$0 \leq \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} \leq t^k e^{-xt} \leq e^{-xt/2}.$$

L'intégrale de l'exponentielle de droite converge puisque $x/2 > 0$. Par comparaison et continuité sur $[1, T]$, $J_k(x)$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $x = 0$, on a, lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\frac{t^k}{1+t^5} \sim t^{k-5} = \frac{1}{t^{5-k}}.$$

Les deux fonctions étant positives, le critère d'équivalence et le critère des intégrales de Riemann montrent que l'intégrale converge si et seulement si $5 - k > 1$. Pour un entier naturel k , les valeurs cherchées sont donc exactement $k = 0, 1, 2, 3$.

2. La question précédente assure que $F(x) = J_0(x)$ est bien définie pour tout $x \geq 0$.

L'intégrande est strictement positive; son intégrale sur $[1, 2]$ est déjà strictement positive, donc $F(x) > 0$.

Si $0 \leq x < y$, alors, pour $t \geq 1$,

$$\frac{e^{-yt}}{1+t^5} < \frac{e^{-xt}}{1+t^5}.$$

L'intégrale de la différence est strictement positive, ce que l'on peut vérifier sur $[1, 2]$.

Ainsi $F(y) < F(x)$: F est même strictement décroissante.

Enfin, pour $x \geq 0$ et $t \geq 1$, $e^{-xt} \leq e^{-x}$. Par comparaison,

$$0 < F(x) \leq e^{-x} J_0(0).$$

Comme $J_0(0)$ est un réel fini, l'encadrement entraîne $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. a) On établit d'abord une inégalité scalaire en utilisant seulement des intégrales sur segments. Pour $s \geq 0$,

$$0 \leq 1 - e^{-s} = \int_0^s e^{-r} dr \leq s.$$

En intégrant ces inégalités entre 0 et $u \geq 0$, on obtient

$$0 \leq e^{-u} - 1 + u = \int_0^u (1 - e^{-s}) ds \leq \frac{u^2}{2}.$$

On applique ceci à $u = th \geq 0$, puis on multiplie par $e^{-tx} > 0$. Comme

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + the^{-tx} = e^{-tx}(e^{-th} - 1 + th),$$

on obtient exactement

$$|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + the^{-tx}| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}.$$

L'argument reste valable lorsque $t = 0$ ou $h = 0$, les deux membres étant alors nuls.

3. b) On pose cette fois $v = -th \geq 0$. Pour $0 \leq s \leq v$,

$$0 \leq e^s - 1 = \int_0^s e^r dr \leq se^v.$$

Par intégration sur $[0, v]$,

$$0 \leq e^v - 1 - v = \int_0^v (e^s - 1) ds \leq \frac{v^2}{2} e^v.$$

Or

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + the^{-tx} = e^{-tx}(e^v - 1 - v).$$

On multiplie l'inégalité précédente par e^{-tx} , puis on utilise $e^{-tx}e^v = e^{-t(x+h)}$ et $v^2 = t^2 h^2$. Il vient

$$|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + the^{-tx}| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)}.$$

3. c) Si $h \geq 0$, la question 3.a et $x \geq 0$ donnent, pour $t \geq 1$,

$$|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}| \leq \frac{t^2 h^2}{2}.$$

Si $h \leq 0$, on utilise 3.b et $x + h \geq 0$ pour obtenir le même majorant.

On divise par $1 + t^5 > 0$ et on intègre d'abord sur $[1, T]$. L'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne

$$\left| \int_1^T \frac{e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}}{1 + t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^T \frac{t^2}{1 + t^5} dt.$$

Les trois intégrales du membre de gauche et celle du membre de droite convergent d'après la question 1, y compris lorsque l'un des paramètres x ou $x + h$ est nul. La linéarité et le passage à la limite $T \rightarrow +\infty$ donnent donc

$$|F(x+h) - F(x) + h J_1(x)| \leq \frac{h^2}{2} J_2(0).$$

3. d) Question adaptée au programme actuel : à l'extrémité 0, il s'agit de la dérivée à droite.

Pour $h \neq 0$ et $x + h \geq 0$, l'inégalité précédente entraîne

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + J_1(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} J_2(0).$$

Le majorant tend vers 0 avec h , car $J_2(0)$ est fini. Ainsi F est dérivable en tout $x > 0$, et dérivable à droite en 0, avec

$$F'(x) = -J_1(x) = - \int_1^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1 + t^5} dt.$$

Cette preuve repose sur une majoration explicite du quotient de différences et ne suppose aucun échange entre dérivée et intégrale.

4. On applique aux mêmes expressions exponentielles les inégalités de 3.a et 3.b, puis on multiplie par $t/(1 + t^5)$. Pour $x \geq 0$ et $x + h \geq 0$, cela donne, par intégration sur segment puis passage à la limite,

$$|J_1(x+h) - J_1(x) + h J_2(x)| \leq \frac{h^2}{2} J_3(0).$$

Toutes les intégrales utilisées sont convergentes par la question 1 ; en particulier $J_3(0)$ est fini. Après division par $|h|$, pour $h \neq 0$, on obtient

$$\left| \frac{J_1(x+h) - J_1(x)}{h} + J_2(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} J_3(0) \rightarrow 0.$$

Donc $J_1'(x) = -J_2(x)$, avec la convention de dérivation à droite en 0. Comme $F' = -J_1$, on conclut

$$F''(x) = J_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt.$$

Pour vérifier aussi la continuité nécessaire aux résultats usuels de convexité, remarquons que, si $x, y \geq 0$, les inégalités des accroissements finis appliquées à $s \mapsto e^{-ts}$ sur le segment d'extrémités x, y donnent

$$|e^{-ty} - e^{-tx}| \leq t|y - x|.$$

On en déduit

$$|J_2(y) - J_2(x)| \leq |y - x| J_3(0).$$

Ainsi $F'' = J_2$ est continue sur $[0, +\infty[$, au sens unilatéral en 0, et F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

5. a) L'hypothèse impose d'abord $a \geq 0$: si $a < 0$, le polynôme tendrait vers $-\infty$ lorsque $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

Si $a = 0$, l'inégalité devient $2b\lambda + c \geq 0$ pour tout réel λ . Cela impose $b = 0$, sans quoi on choisirait λ de signe opposé à b et de valeur absolue assez grande. Alors $ac - b^2 = 0$.

Si $a > 0$, on choisit $\lambda = -b/a$. L'hypothèse donne

$$0 \leq a \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{b^2}{a} + c = c - \frac{b^2}{a}.$$

En multipliant par $a > 0$, on obtient $ac - b^2 \geq 0$. Le résultat est donc établi dans tous les cas.

5. b) On fixe $x \geq 0$. Pour tout réel λ , la fonction

$$t \mapsto (\lambda - t)^2 \frac{e^{-xt}}{1 + t^5}$$

est positive et intégrable sur $[1, +\infty[$: son développement ne fait intervenir que $J_0(x)$, $J_1(x)$ et $J_2(x)$, toutes absolument convergentes. Par positivité et linéarité,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} (\lambda - t)^2 \frac{e^{-xt}}{1 + t^5} dt = \lambda^2 F(x) + 2\lambda F'(x) + F''(x).$$

La question 5.a, appliquée à $a = F(x)$, $b = F'(x)$ et $c = F''(x)$, entraîne

$$F(x)F''(x) - F'(x)^2 \geq 0.$$

La fonction F est strictement positive, donc $\ln(F)$ est bien définie. Pour $x > 0$, elle est de classe C^2 et

$$(\ln F)''(x) = \frac{F(x)F''(x) - F'(x)^2}{F(x)^2} \geq 0.$$

Elle est donc convexe sur $]0, +\infty[$. Elle est aussi continue en 0, car F y est dérivable à droite et $F(0) > 0$. Les inégalités de convexité sur l'intervalle ouvert se prolongent en 0 par continuité. Ainsi $\ln(F)$ est convexe sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE II

I. Simulation

Code adapté en Python. On associe les entiers 0, 1 et 2 respectivement aux lettres a , b et c . Les variables x et y mémorisent la position courante des deux jetons. Pour une variable x valant 0 ou 1, son complément $1 - x$ change sa valeur.

Python

```
import numpy as np
```

```
N = int(input("N = "))
```

```
x = 0
y = 0
couples = []
for n in range(1, N + 1):
    lettre = np.random.randint(0, 3)
    if lettre == 0:
        x = 1 - x
    elif lettre == 1:
        y = 1 - y
    couples.append((x, y))
print(couples)
```

La boucle effectue exactement N tirages, et enregistre chaque couple après l'opération correspondante. Lorsque la lettre c est simulée, les deux positions restent inchangées. Pour $N = 0$, aucune opération n'est effectuée et la liste affichée est vide. Pour $N \geq 1$, la liste contient exactement les couples demandés, dans leur ordre chronologique.

Le code a été exécuté et contrôlé pour plusieurs tailles de simulation. La simulation illustre le modèle ; les lois sont établies dans les questions suivantes par des calculs exacts.

II. Étude du mouvement du jeton A

1. a) Le jeton A ne quitte pas C_0 pendant les n premières opérations si et seulement si aucune des n lettres tirées n'est a . À chaque tirage, cet événement a pour probabilité $2/3$. Les tirages étant indépendants,

$$P(A \text{ n'a jamais quitté } C_0 \text{ après } n \text{ opérations}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

1. b) Notons E l'événement «le jeton A reste indéfiniment dans C_0 ». Pour tout $n \geq 1$, cet événement est inclus dans l'événement de la question précédente. Par croissance des probabilités,

$$0 \leq P(E) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Le membre de droite tend vers 0. Par encadrement, $P(E) = 0$. Cette preuve évite d'avoir à invoquer un résultat de continuité sur une intersection infinie.

2. Question adaptée au programme actuel : la formulation précise qu'il s'agit du premier retour après un départ effectif, lequel ne doit pas nécessairement avoir lieu dès le premier tirage.

Méthode 1 — Décomposer selon l'instant du départ

Pour $1 \leq j \leq k-1$, notons $E_{j,k}$ l'événement « le premier départ de C_0 a lieu à l'opération j et le premier retour a lieu à l'opération k ». Cet événement impose :

- l'absence de lettre a lors des $j-1$ premiers tirages ;
- la lettre a au tirage j , pour quitter C_0 ;
- l'absence de lettre a lors des $k-j-1$ tirages suivants, pour rester dans C_1 ;
- la lettre a au tirage k , pour revenir dans C_0 .

Par indépendance,

$$P(E_{j,k}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

Les événements $E_{j,k}$, pour $j = 1, \dots, k-1$, sont incompatibles et leur réunion est D_k . Par addition,

$$P(D_k) = \frac{k-1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{(k-1)2^{k-2}}{3^k}.$$

Méthode 2 — Compter les occurrences de la lettre a

Chaque lettre a fait changer A de case. Le premier départ correspond donc à la première occurrence de a , et le premier retour à sa deuxième occurrence. Ainsi D_k se réalise exactement lorsqu'il y a une seule lettre a parmi les $k - 1$ premiers tirages, puis une lettre a au tirage k .

Le nombre de lettres a parmi les $k - 1$ premiers tirages suit la loi binomiale de paramètres $k - 1$ et $1/3$. Le dernier tirage en est indépendant. Par conséquent,

$$P(D_k) = \binom{k-1}{1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \frac{1}{3} = \frac{k-1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

La première méthode décrit les trajectoires ; la seconde identifie un comptage binomial. Elles conduisent à la même loi.

3. a) On considère les deux colonnes $u = {}^t(1, 1)$ et $v = {}^t(1, -1)$. Un produit direct donne

$$Mu = 3u, \quad Mv = v.$$

Ainsi u est propre pour la valeur propre 3, et v pour la valeur propre 1. Les valeurs propres étant distinctes, ces deux vecteurs non nuls sont linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Pour vérifier qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, on écrit tout vecteur $z = \alpha u + \beta v$ dans cette base. L'égalité $Mz = \lambda z$ devient

$$(3 - \lambda)\alpha = 0, \quad (1 - \lambda)\beta = 0.$$

Si $z \neq 0$, l'un des coefficients α, β est non nul, donc λ vaut 3 ou 1. Le spectre de M est exactement $\{1, 3\}$.

3. b) Méthode 1 — Utiliser la base propre

On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est inversible puisque ses colonnes forment une base. On vérifie par multiplication que $P^2 = 2I_2$, donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2}P.$$

Les égalités de 3.a donnent $MP = PD$, donc $M = PDP^{-1}$. Par récurrence sur n , $M^n = PD^nP^{-1}$. En effectuant les deux produits,

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Une récurrence sur les coefficients

La forme $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ est vraie au rang 1 avec $a_1 = 2, b_1 = 1$. Si elle est vraie au rang n , la multiplication par M donne

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n.$$

La forme est donc conservée à chaque rang. En ajoutant puis en soustrayant ces relations,

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n), \quad a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n.$$

Comme $a_1 + b_1 = 3$ et $a_1 - b_1 = 1$, on obtient $a_n + b_n = 3^n$ et $a_n - b_n = 1$. La résolution donne $a_n = (3^n + 1)/2$ et $b_n = (3^n - 1)/2$, soit la même formule. Cette approche

retrouve directement deux suites simples à partir des coefficients, tandis que la première utilise la diagonalisation.

4. a) À la première opération, A change de case exactement lorsque la lettre a est tirée.

Ainsi

$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{3}, \quad P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}.$$

4. b) Le tirage suivant est indépendant des tirages passés. Depuis chaque case, A reste sur place avec probabilité $2/3$ et change de case avec probabilité $1/3$. En décomposant selon la valeur de X_n , on obtient

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{1}{3}P(X_n = 1),$$

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_n = 0) + \frac{2}{3}P(X_n = 1).$$

Ces égalités valent aussi pour $n = 0$, sans conditionner par l'événement de probabilité nulle $X_0 = 1$: les transitions sont les règles du dispositif et les termes correspondants ont un poids nul. La matrice cherchée est donc

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}M.$$

Les probabilités étant écrites en colonnes, la matrice de transition selon la convention des lignes est ${}^tQ$. Ici Q est symétrique, donc les deux matrices coïncident.

4. c) Méthode 1 — Exploiter la puissance de M

Comme $Q = M/3$, on a $Q^n = M^n/3^n$. D'après 3.b,

$$Q^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 3^{-n} & 1 - 3^{-n} \\ 1 - 3^{-n} & 1 + 3^{-n} \end{pmatrix}.$$

La colonne initiale est ${}^t(1, 0)$; en itérant la relation de 4.b, la loi de X_n est donc la première colonne de Q^n . Ainsi

$$P(X_n = 0) = \frac{1 + 3^{-n}}{2}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1 - 3^{-n}}{2}.$$

En particulier X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $(1 - 3^{-n})/2$.

Méthode 2 — Résoudre la récurrence de la probabilité

Posons $p_n = P(X_n = 1)$. La relation de 4.b et $P(X_n = 0) = 1 - p_n$ donnent

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) + \frac{2}{3}p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_n.$$

Le point fixe est $1/2$. En soustrayant cette valeur, on obtient

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right).$$

Comme $p_0 = 0$, la suite géométrique associée donne $p_n - 1/2 = -3^{-n}/2$, d'où la loi précédente. Cette méthode fournit directement les probabilités sans calcul matriciel supplémentaire; la première fournit en outre toute la matrice Q^n demandée.

III. Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

1. À partir de l'état initial $(0, 0)$, la lettre c conduit à l'état 0, la lettre b à l'état 1 et la lettre a à l'état 2. On ne peut pas atteindre l'état 3 en un seul tirage. Ainsi

$$P(W_1 = 0) = P(W_1 = 1) = P(W_1 = 2) = \frac{1}{3}, \quad P(W_1 = 3) = 0.$$

2. Les opérations possibles depuis chaque état sont résumées dans le tableau suivant :

État présent	Lettre a	Lettre b	Lettre c
0	2	1	0
1	3	0	1
2	0	3	2
3	1	2	3

Chaque lettre a pour probabilité $1/3$, indépendamment du passé. La colonne d'indice j de la matrice agissant sur les colonnes de probabilités rassemble les probabilités d'arrivée dans les états 0, 1, 2, 3 depuis l'état j . On obtient donc

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(U - V).$$

Chaque coefficient est positif ou nul et chaque colonne somme à 1, comme attendu avec cette convention. La matrice de transition selon la convention des lignes est ${}^tR$; ici encore la symétrie donne ${}^tR = R$.

3. a) Chaque coefficient de U^2 est la somme de quatre produits égaux à 1, donc

$U^2 = 4U$. Une récurrence donne alors, pour $n \geq 1$,

$$U^n = 4^{n-1}U.$$

En effet, la formule est vraie pour $n = 1$; si elle est vraie au rang n , alors

$$U^{n+1} = 4^{n-1}U^2 = 4^nU.$$

La matrice V renverse l'ordre des coordonnées; l'appliquer deux fois les remet dans leur ordre initial. Ainsi $V^2 = I$, ce que l'on vérifie aussi par produit direct. Par conséquent,

$$V^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ est pair,} \\ V & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

3. b) Multiplier U par V à droite permute ses colonnes ; toutes les colonnes de U étant identiques, $UV = U$. De même $VU = U$, car la multiplication à gauche permute des lignes identiques. Ainsi U et V commutent.

Les matrices U et $-V$ commutent donc également. La formule du binôme pour deux matrices qui commutent donne

$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^{n-k} (-V)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} U^{n-k} V^k.$$

La convention $U^0 = V^0 = I$ assure que les termes d'extrémité sont bien inclus.

3. c) On isole le terme $k = n$ du binôme, égal à $(-1)^n V^n$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $n - k \geq 1$, donc

$$U^{n-k} V^k = 4^{n-k-1} U V^k = 4^{n-k-1} U.$$

La dernière égalité vient de $UV = U$, donc $UV^k = U$ pour tout $k \geq 0$. Il en résulte

$$(U - V)^n = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} 4^{n-k-1} \right] U + (-1)^n V^n.$$

Pour calculer la somme entre crochets, on utilise le binôme scalaire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} 4^{n-k-1} = \frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^{n-k} (-1)^k - (-1)^n \right] = \frac{3^n - (-1)^n}{4}.$$

Ainsi

$$(U - V)^n = \frac{1}{4}[3^n - (-1)^n]U + (-1)^n V^n.$$

4. De $R = (U - V)/3$ et de la question précédente, on déduit

$$R^n = \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right] U + \left(-\frac{1}{3} \right)^n V^n.$$

La colonne initiale est ${}^t(1, 0, 0, 0)$; la loi de W_n est la première colonne de R^n .

Si n est pair, alors $V^n = I$ et $(-1/3)^n = 3^{-n}$. Ainsi

$$R^n = \frac{1 - 3^{-n}}{4} U + 3^{-n} I,$$

et

$$P(W_n = 0) = \frac{1 + 3 \cdot 3^{-n}}{4}, \quad P(W_n = 1) = P(W_n = 2) = P(W_n = 3) = \frac{1 - 3^{-n}}{4}.$$

Si n est impair, alors $V^n = V$ et $(-1/3)^n = -3^{-n}$. Ainsi

$$R^n = \frac{1 + 3^{-n}}{4} U - 3^{-n} V.$$

La première colonne de V est ${}^t(0, 0, 0, 1)$, donc

$$P(W_n = 0) = P(W_n = 1) = P(W_n = 2) = \frac{1 + 3^{-n}}{4}, \quad P(W_n = 3) = \frac{1 - 3 \cdot 3^{-n}}{4}.$$

Toutes ces probabilités sont positives ou nulles : dans le cas impair, $n \geq 1$ implique $3 \cdot 3^{-n} \leq 1$. Elles somment à 1 dans chaque cas. Pour $n = 1$, on retrouve la loi de la question 1. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, les quatre probabilités tendent vers $1/4$.

5. Les variables X_n, Y_n et leur produit sont bornés, donc possèdent une espérance. Par symétrie entre les jetons et d'après II.4.c,

$$E(X_n) = E(Y_n) = \frac{1 - 3^{-n}}{2}.$$

Le produit $X_n Y_n$ vaut 1 exactement lorsque les deux jetons sont dans C_1 , c'est-à-dire lorsque $W_n = 3$. La question précédente donne, en réunissant les deux parités,

$$E(X_n Y_n) = P(W_n = 3) = \frac{1 - 2 \cdot 3^{-n} + (-1/3)^n}{4}.$$

On applique la définition de la covariance :

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = E(X_n Y_n) - E(X_n)E(Y_n).$$

Comme $(1 - 3^{-n})^2 = 1 - 2 \cdot 3^{-n} + 3^{-2n}$, on obtient

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^n - \left(\frac{1}{9} \right)^n \right].$$

Les deux suites géométriques tendent vers 0, donc la covariance tend vers 0. Pour chaque $n \geq 1$, elle n'est cependant pas nulle : elle est positive pour n pair et négative pour n impair. En particulier, on n'a pas supposé l'indépendance des positions des deux jetons, qui ne découle pas de l'indépendance des tirages.

IV. Étude d'un temps de séjour

1. Question adaptée au programme actuel : la convention de décompte discret est précisée dans l'énoncé.

Pour chaque k , X_k vaut 1 si la minute d'indice k est comptée comme passée dans C_1 , et vaut 0 sinon. En additionnant ces contributions,

$$T_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Cette égalité est valable pour chaque réalisation de l'expérience.

2. La variable T_n est bornée entre 0 et n , donc possède une espérance. La linéarité s'applique à la somme finie de la question précédente, sans hypothèse

d'indépendance entre les X_k :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 3^{-k}.$$

La somme géométrique vaut

$$\sum_{k=1}^n 3^{-k} = \frac{(1/3)(1 - 3^{-n})}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}(1 - 3^{-n}).$$

Par conséquent,

$$E(T_n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}(1 - 3^{-n}).$$

En divisant par $n \geq 1$,

$$\frac{E(T_n)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1 - 3^{-n}}{4n} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Le temps de séjour moyen, rapporté à la durée totale, tend donc vers une moitié. Ce calcul porte sur les espérances et n'affirme pas à lui seul une convergence des temps observés.

Relevé des adaptations

- Exercice I, préambule, 3.d et 4 : la dérivation à droite en 0 est explicitée, le domaine étant le demi-axe $[0, +\infty[$. Toutes les dérivées sont établies par des encadrements particuliers.
- Exercice II, I : Code adapté en Python. La demande de programme et la documentation du générateur aléatoire sont converties en préservant les trois issues équiprobables et l'affichage des couples.
- Exercice II, préambule, II.4.b et III.2 : la convention des probabilités en colonnes est explicitée ainsi que son lien par transposition avec la convention des lignes.

- Exercice II, II.2 : la notion de premier retour est précisée comme premier retour après un départ effectif, dont l'instant peut être postérieur au premier tirage.
- Exercice II, IV.1 : la minute d'indice k est comptée d'après la position X_k , afin de rendre le décompte discret non ambigu.